

**Sistema Musicale Aureo  $\Phi^{(n/7)}$  e connessioni matematiche tra numeri primi e “Paesaggio” della Teoria delle Stringhe.**

**Christian Lange<sup>1</sup>, Michele Nardelli<sup>2,3</sup> e Giuseppe Bini<sup>4,5</sup>**

<sup>1</sup>Dipartimento di Ingegneria (Ing.Meccanica) – Università degli Studi di Kassel

34109 Kassel (Germany)

<sup>2</sup>Dipartimento di Scienze della Terra

Università degli Studi di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10

80138 Napoli, Italy

<sup>3</sup>Dipartimento di Matematica ed Applicazioni “R. Caccioppoli”

Università degli Studi di Napoli “Federico II” – Polo delle Scienze e delle Tecnologie

Monte S. Angelo, Via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

<sup>4</sup> Corso di Composizione Sperimentale, Pianoforte e Direzione d’Orchestra –

Conservatorio di Musica “N. Piccinni”, Via Cifarelli 26 - 70124 Bari, Italy

<sup>5</sup> Corso di Composizione – Accademia Nazionale di “S. Cecilia”, L.go Luciano Berio 3 -

00196 Roma, Italy

## **Sistema musicale Phi**

Nella natura il rapporto matematico  $\Phi = 1,6180339\dots$  risulta onnipresente e, più le proporzioni naturali si avvicinano alla sezione aurea, più all'occhio umano tali proporzioni sembrano tendere al concetto di bellezza.

Nella musica con il sistema temperato a 12 note per ottava, sulla quale si basa tutta la musica odierna, non è presente un intervallo musicale matematico corrispondente esattamente a  $\Phi$ . Gli intervalli di sesta maggiore (*rapporto* = 1,666) e sesta minore (*rapporto* = 1,6) si avvicinano ma non corrispondono esattamente a  $\Phi$ .

A questo punto, lo scopo è quello di creare un sistema musicale basato sull'intervallo  $\Phi$ . Si propongono diverse possibilità nel farlo. Si potrebbe pensare di proporre un qualsiasi sistema a cui corrisponda la seguente logica:  $x = \Phi^{(n/y)}$ , dove  $x$  è il fattore matematico che determina la frequenza di ogni nota,  $n$  per convenzione rappresenta la serie di numeri naturali equidistanti tra loro (1,2,3,4...) corrispondenti alla prima, seconda, terza... nota e  $y$  è la quantità di note scelte fra 1 e 1,6180339. Per motivi che verranno spiegati in seguito, si è scelto di riprodurre l'intervallo  $\Phi$  ogni 8 suoni includendo gli estremi ( $y = 7$ ). I fattori  $x$  di ogni nota, quindi, si calcolano con la seguente formula:  $x = \Phi^{(n/7)}$ . Nella tabella seguente sono annotati i valori nella colonna A per  $n = [-20, 17]$ . Per stabilire connessioni più profonde tra il nostro sistema musicale e la natura fisica del suono, oltre al rapporto matematico  $\Phi$  è necessario includerne altri. Precedentemente è stato usato il sistema  $x = \Phi^{(n/9)}$  che corrispondeva a  $x = 2^{(n/12,96)}$  ovvero, un sistema in cui i suoni si moltiplicavano per 2 (intervallo dell'ottava nel sistema tradizionale) circa ogni 13 note. Questo sistema conteneva oltre all'intervallo  $\Phi$  solo il rapporto 2, per cui le possibilità di trovare rapporti armonici erano limitate. Di qui la necessità di trovare un sistema alternativo più valido. Oltre il fattore 2 è stato esaminato il fattore 3. La corrispondenza delle Potenze di  $\Phi$  ( $\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4 \dots$ ) rispetto un sistema su base 3 si ottiene per la combinazione  $x = \Phi^{(n/7)}$  e  $x = 3^{(n/16)}$ . Ciò significa che i fattori ottenuti con  $\Phi^{(n/7)}$  della colonna A corrispondono quasi precisamente a quelli di  $3^{(n/16)}$  della colonna C e precisamente a quelli di  $3^{(n/15,98)}$  della colonna B. L'approssimazione fra 16 e 15,98 è accettabile. Partendo da qualsiasi suono del sistema musicale, ogni 7 suoni ritroviamo l'intervallo  $\Phi$  e ogni 16 suoni il rapporto = 3 (se si conta anche il suono di partenza bisogna considerare rispettivamente l'8° e il 17° suono).

	A	B	C	D	E	F	G
n	$\Phi^{(n/7)}$	$3^{(n/15,9810828)}$	$3^{(n/16)}$	$2^{(n/10)}$	$2^{(n/10,08294063)}$	Frequenza	Fibonacci
-20	0,2528671748	0,2528671748	0,253279	0,250000	0,252867	77,463893	
-19	0,2708618458	0,2708618458	0,271280	0,267943	0,270862	82,97642	
-18	0,2901370632	0,2901370632	0,290562	0,287175	0,290137	88,881233	89
-17	0,3107839541	0,3107839541	0,311214	0,307786	0,310784	95,206248	
-16	0,3329001303	0,3329001303	0,333333	0,329877	0,332900	101,98137	
-15	0,3565901498	0,3565901498	0,357025	0,353553	0,356590	109,23862	
-14	0,3819660113	0,3819660112	0,382401	0,378929	0,381966	117,01232	
-13	0,4091476835	0,4091476835	0,409580	0,406126	0,409148	125,33921	
-12	0,4382636727	0,4382636727	0,438691	0,435275	0,438264	134,25867	
-11	0,4694516297	0,4694516297	0,469872	0,466516	0,469452	143,81286	144
-10	0,5028590010	0,5028590010	0,503268	0,500000	0,502859	154,04694	
-9	0,5386437257	0,5386437257	0,539038	0,535887	0,538644	165,00932	
-8	0,5769749824	0,5769749824	0,577350	0,574349	0,576975	176,7518	
-7	0,6180339887	0,6180339887	0,618386	0,615572	0,618034	189,32991	
-6	0,6620148584	0,6620148584	0,662338	0,659754	0,662015	202,8031	
-5	0,7091255185	0,7091255185	0,709414	0,707107	0,709126	217,23509	
-4	0,7595886929	0,7595886929	0,759836	0,757858	0,759589	232,69409	233
-3	0,8136429551	0,8136429551	0,813841	0,812252	0,813643	249,25319	
-2	0,7595886929	0,8715438560	0,871686	0,870551	0,871544	232,69409	
-1	0,8321817626	0,9335651322	0,933641	0,933033	0,933565	254,93241	
0	1,0000000000	1,0000000000	1,000000	1,000000	1,000000	306,34222	
1	1,0711625419	1,0711625419	1,071075	1,071773	1,071163	328,14232	
2	1,1473891912	1,1473891912	1,147203	1,148698	1,147389	351,49376	
3	1,2290403226	1,2290403226	1,228741	1,231144	1,229040	376,50695	377
4	1,3165019560	1,3165019561	1,316074	1,319508	1,316502	403,30014	
5	1,4101875817	1,4101875817	1,409615	1,414214	1,410188	432	
6	1,5105401145	1,5105401146	1,509804	1,515717	1,510540	462,74222	
7	1,6180339887	1,6180339888	1,617114	1,624505	1,618034	495,67213	
8	1,7331774003	1,7331774003	1,732051	1,741101	1,733177	530,94542	
9	1,8565147097	1,8565147097	1,855157	1,866066	1,856515	568,72885	
10	1,9886290155	1,9886290155	1,987013	2,000000	1,988629	609,20104	610
11	2,1301449111	2,1301449112	2,128241	2,143547	2,130145	652,55333	
12	2,2817314377	2,2817314377	2,279507	2,297397	2,281731	698,99068	
13	2,4441052467	2,4441052467	2,441524	2,462289	2,444105	748,73264	
14	2,6180339887	2,6180339888	2,615057	2,639016	2,618034	802,01435	
15	2,8043399422	2,8043399422	2,800923	2,828427	2,804340	859,08773	
16	3,0039039008	3,0039039009	3,000000	3,031433	3,003904	920,2226	
17	3,2176693381	3,2176693381	3,213226	3,249010	3,217669	985,70798	987

Si è verificato che esiste anche una buona corrispondenza con la base 2. Si possono infatti ottenere i valori della colonna A anche con  $x = 2^{(n/10,08)}$ . Quindi, con una buona approssimazione, ogni 10 suoni si duplicano le frequenze (contando il primo tasto, l'undicesimo tasto ha una frequenza che è circa due volte la prima). In questo caso l'errore fra 10 (colonna D) e 10,08 (colonna E) è superiore rispetto quello fra 16 e 15,98 ma tutto sommato è possibile identificare tale intervallo con quello tradizionale dell'ottava nel sistema tradizionale. A questo punto il nostro sistema contiene i fattori 1.618, 3 e 2. Oltre ad essere basato sul rapporto naturale Phi e sui fattori 3 e 2, il sistema è basato anche sul numero 7 che è un numero presente in natura (7 colori, 7 giorni della settimana, 7 chakra, 7 le dimensioni compatte della teoria-M, ecc.).

Per intonare il sistema bisogna definire la frequenza che corrisponde al fattore 1. Per esigenze pratiche legate alla necessità di riprodurre realmente e il più precisamente possibile le frequenze del sistema musicale, si è adoperata una tastiera con estensione di 7 ottave e con la possibilità di modificare disgiuntamente in cents l'intonazione di ogni singolo tasto in un range = [-99,99] cents. Per intonare la tastiera, quindi, bisogna adeguarsi più o meno alle frequenze già definite in essa. La nota LA<sub>3</sub> è intonata a 440 Hz. Da ricerche fatte sappiamo che tale frequenza non è naturale, ma che quella in piena armonia con la natura e con l'essere umano corrisponde a 432 Hz (vedi Rivoluzione Omega). L'abbinamento dei tasti del pianoforte, nel caso nostro, è stato fatto in maniera tale che il fattore 1 corrisponde con il centro di una tastiera di 88 tasti. Il tasto del LA<sub>3</sub> corrisponde quindi al fattore 1,410188. Per ottenere 432 Hz corrispondente al fattore 1,410188, il fattore 1 corrisponde a 306,342224 Hz. Partendo da tale frequenza base e moltiplicandola per tutti i valori della colonna A della tabella precedente, si ottengono tutte le frequenze di ogni nota del sistema.

Intonando così il sistema musicale, si nota che le frequenze in Hz contengono con buona approssimazione i numeri della serie di Fibonacci (colonna G) ogni sette note (colore verde nella colonna F). Naturalmente, esulando da esigenze pratiche legate all'intonazione di una tastiera come nel nostro caso e trattandosi di un sistema, abbinando al fattore 1 qualsiasi frequenza del sistema  $Phi^{(n/7)}$ , si ottengono sempre numeri della serie di Fibonacci. Si ricorda che dividendo due numeri di Fibonacci (per esempio 144/89) si ottiene *Phi*, sempre più preciso per numeri di Fibonacci sempre più alti all'infinito. In pratica la serie di Fibonacci conduce a *Phi* e il sistema musicale *Phi* intonato sulla frequenza di 432 Hz contiene i numeri di Fibonacci in Hz: il cerchio, quindi, si chiude. A questo punto ricordiamo ed evidenziamo anche la serie di Lucas (2,1,3,4,7,11,18,29...),

che, come per Fibonacci, dividendo numeri sempre più grandi tra loro all'infinito, conduce ad una sempre più precisa approssimazione di *Phi*. Per definizione, ogni sistema musicale *Phi* contiene le potenze di *Phi* stesso. Si nota che le potenze di *Phi* corrispondono in buona approssimazione alla serie di Lucas. Per numeri sempre più grandi (da 29 in poi) la corrispondenza è sempre più perfetta. Quindi, il sistema  $Phi^{(n/7)}$ , contenendo le potenze di *Phi*, include automaticamente anche la serie di Lucas: e il cerchio si chiude nuovamente! Diviene chiaro che tali corrispondenze tra il sistema  $Phi^{(n/7)}$  su base 432 Hz e le serie di Fibonacci (frequenze) e Lucas (fattori) rappresentano una conferma della validità del nostro sistema, in armonia con la natura numerica dell'intero universo. Ricordiamo, infine, che la *teoria-M* prevede 11 dimensioni: 4, che sono il nostro spazio-tempo quadridimensionale e 7 che sono le dimensioni compattificate. Notiamo che 4, 7 ed 11 sono numeri appartenenti alla serie di Lucas!

Qui di seguito si riporta la tabella del sistema musicale *Phi* su base 3, ricordando che  $Phi^{(n/7)} = 3^{(n/15,9810828)} \approx 3^{(n/16)}$ . Ogni sette note è evidenziato in giallo il fattore *Phi*:

$2^{(n/10,08294063)}$	$3^{(n/16)}$	$3^{(n/15,9810828)}$	$Phi^{(n/7)}$
0,048569474	0,048743482	0,048569474	0,048569474
0,052025802	0,052207948	0,052025802	0,052025802
0,05572809	0,055918654	0,05572809	0,05572809
0,059693842	0,059893099	0,059693843	0,059693843
0,063941808	0,06415003	0,063941808	0,063941808
0,06849207	0,068709524	0,06849207	0,06849207
0,073366139	0,073593087	0,073366139	0,073366139
0,07858706	0,078823751	0,07858706	0,07858706
0,084179515	0,084426187	0,084179515	0,084179515
0,090169944	0,090426819	0,090169944	0,090169944
0,096586666	0,096853949	0,096586666	0,096586666
0,103460019	0,10373789	0,103460019	0,103460019
0,110822497	0,111111111	0,110822497	0,110822497
0,118708907	0,119008387	0,118708907	0,118708907
0,127156535	0,127466966	0,127156535	0,127156535
0,136205317	0,136526742	0,136205317	0,136205317
0,145898034	0,146230446	0,145898034	0,145898034
0,156280509	0,156623845	0,156280509	0,156280509
0,167401827	0,167755961	0,167401827	0,167401827
0,179314566	0,179679297	0,179314566	0,179314566
0,192075047	0,19245009	0,192075047	0,192075047
0,205743595	0,206128573	0,205743595	0,205743595
0,220384833	0,220779261	0,220384833	0,220384833
0,236067977	0,236471253	0,236067977	0,236067977

0,252867175	0,253278562	0,252867175	0,252867175
0,270861846	0,271280458	0,270861846	0,270861846
0,290137063	0,290561848	0,290137063	0,290137063
0,310783954	0,311213671	0,310783954	0,310783954
0,33290013	0,333333333	0,33290013	0,33290013
0,35659015	0,357025161	0,35659015	0,35659015
0,381966011	0,382400897	0,381966011	0,381966011
0,409147683	0,409580225	0,409147684	0,409147684
0,438263673	0,438691338	0,438263673	0,438263673
0,46945163	0,469871536	0,46945163	0,46945163
0,502859001	0,503267883	0,502859001	0,502859001
0,538643726	0,539037891	0,538643726	0,538643726
0,576974982	0,577350269	0,576974982	0,576974982
0,618033989	0,618385718	0,618033989	0,618033989
0,662014858	0,662337782	0,662014858	0,662014858
0,709125518	0,70941376	0,709125518	0,709125518
0,759588693	0,759835686	0,759588693	0,759588693
0,813642955	0,813841374	0,813642955	0,813642955
0,871543856	0,871685543	0,871543856	0,871543856
0,933565132	0,933641014	0,933565132	0,933565132
1	1	1	1
1,071162542	1,071075483	1,071162542	1,071162542
1,147389191	1,14720269	1,147389191	1,147389191
1,229040323	1,228740676	1,229040323	1,229040323
1,316501956	1,316074013	1,316501956	1,316501956
1,410187582	1,409614609	1,410187582	1,410187582
1,510540115	1,509803648	1,510540115	1,510540115
1,618033989	1,617113672	1,618033989	1,618033989
1,733177401	1,732050808	1,7331774	1,7331774
1,85651471	1,855157155	1,85651471	1,85651471
1,988629016	1,987013346	1,988629016	1,988629015
2,130144912	2,12824128	2,130144911	2,130144911
2,281731438	2,279507057	2,281731438	2,281731438
2,444105247	2,441524122	2,444105247	2,444105247
2,618033989	2,615056629	2,618033989	2,618033989
2,804339943	2,800923042	2,804339942	2,804339942
3,003903902	3	3,003903901	3,003903901
3,217669339	3,213226449	3,217669338	3,217669338
3,446646868	3,441608071	3,446646867	3,446646867
3,691919021	3,686222028	3,691919019	3,691919019
3,954645363	3,948222039	3,954645361	3,954645361
4,236067979	4,228843828	4,236067978	4,236067977
4,537517344	4,529410945	4,537517343	4,537517342
4,860418613	4,851341016	4,860418611	4,860418611
5,206298356	5,196152423	5,206298354	5,206298354
5,576791781	5,565471466	5,576791778	5,576791778

5,97365046	5,961040039	5,973650457	5,973650457
6,398750611	6,38472384	6,398750608	6,398750608
6,85410197	6,838521171	6,854101966	6,854101966
7,341857289	7,324572367	7,341857285	7,341857285
7,864322516	7,845169886	7,864322511	7,864322511
8,423967697	8,402769125	8,423967692	8,423967692
9,023438651	9	9,023438646	9,023438646
9,665569483	9,639679348	9,665569476	9,665569476
10,35339598	10,32482421	10,35339597	10,35339597
11,09016995	11,05866608	11,09016994	11,09016994
11,87937464	11,84466612	11,87937463	11,87937463
12,72474113	12,68653148	12,72474112	12,72474112
13,63026606	13,58823284	13,63026605	13,63026605
14,60023044	14,55402305	14,60023042	14,60023042
15,63921995	15,58845727	15,63921993	15,63921993
16,75214659	16,6964144	16,75214658	16,75214658
17,94427192	17,88312012	17,94427191	17,94427191
19,22123193	19,15417152	19,22123191	19,22123191
20,58906365	20,51556351	20,58906363	20,58906363
22,05423376	21,9737171	22,05423374	22,05423374
23,62366909	23,53550966	23,62366907	23,62366907
25,30478943	25,20830738	25,30478941	25,30478941
27,10554257	27	27,10554255	27,10554255
29,03444188	28,91903804	29,03444185	29,03444185
31,10060657	30,97447264	31,10060654	31,10060654
33,31380479	33,17599825	33,31380476	33,31380476
35,68449982	35,53399835	35,68449978	35,68449978
38,22389953	38,05959445	38,22389949	38,22389949
40,94400939	40,76469851	40,94400934	40,94400934

Nella prossima tabella, evidenzieremo il sistema *Phi* a 432 Hz e le connessioni con i numeri di Fibonacci (frequenze in giallo) e quelli di Lucas (fattori in verde).

Sistema Phi	Frequenza [Hz]	Fibonacci
0,090169944	27,62286111	
0,096586666	29,58857412	
0,103460019	31,69417226	
0,110822497	33,94961012	34
0,118708907	36,36555068	
0,127156535	38,9534157	
0,136205317	41,72543978	
0,145898034	44,69472814	

0,156280509	47,8753186	
0,167401827	51,28224797	
0,179314566	54,93162309	55
0,192075047	58,84069702	
0,205743595	63,02795058	
0,220384833	67,51317976	
0,236067977	72,31758924	
0,252867175	77,46389272	
0,270861846	82,97642023	
0,290137063	88,88123321	89
0,310783954	95,20624769	
0,33290013	101,9813663	
0,35659015	109,2386195	
0,381966011	117,0123174	
0,409147684	125,3392113	
0,438263673	134,2586682	
0,46945163	143,8128563	144
0,502859001	154,0469447	
0,538643726	165,0093169	
0,576974982	176,7517993	
0,618033989	189,3299066	
0,662014858	202,803104	
0,709125518	217,2350884	
0,759588693	232,6940895	233
0,813642955	249,2531924	
0,871543856	266,9906832	
0,933565132	285,9904188	
1	306,342224	
1,071162542	328,1423154	
1,147389191	351,4937566	
1,229040323	376,5069458	377
1,316501956	403,3001371	
1,410187582	432	
1,510540115	462,7422181	
1,618033989	495,6721306	
1,7331774	530,9454194	
1,85651471	568,728845	
1,988629016	609,2010353	610
2,130144911	652,5533295	
2,281731438	698,9906832	
2,444105247	748,732637	
2,618033989	802,0143546	
2,804339942	859,0877347	
3,003903901	920,2226017	
3,217669338	985,7079811	987
3,446646867	1055,853467	



3,691919019	1130,990683	
3,954645361	1211,474855	
4,236067978	1297,686485	
4,537517343	1390,033154	
4,860418611	1488,951447	
5,206298354	1594,909016	1597
5,576791778	1708,406796	
5,973650457	1829,981366	
6,398750608	1960,207492	
6,854101966	2099,70084	
7,341857285	2249,120889	
7,864322511	2409,174048	
8,423967692	2580,616998	2584
9,023438646	2764,260263	
9,665569476	2960,97205	
10,35339597	3171,682347	
11,09016994	3397,387325	
11,87937463	3639,154043	
12,72474112	3898,125495	
13,63026605	4175,526014	4181
14,60023042	4472,667059	
15,63921993	4790,953416	
16,75214658	5131,889839	
17,94427191	5497,088165	
19,22123191	5888,274932	
20,58906363	6307,299544	
22,05423374	6756,143012	6765
23,62366907	7236,927322	
25,30478941	7751,925466	
27,10554255	8303,572187	
29,03444185	8894,47549	
31,10060654	9527,428975	
33,31380476	10205,42504	
35,68449978	10931,66903	
38,22389949	11709,59438	
40,94400934	12542,87888	

Nella prossime tabelle, nella colonna  $\phi^{(n/7)}$  sono evidenziate in colore celeste le potenze di  $\phi$  e in giallo le potenze di  $\phi / 100$ . E' impressionante il ripetersi delle cifre decimali. Fra i campi evidenziati in celeste e giallo, inoltre, si ha una successione regolare di 3 e 4.

key n.	$2^{(n/10)}$	$2^{(n/10,08294063)}$	$3^{(n/16)}$	$3^{(n/15,9810828)}$	$\Phi_i^{(n/7)}$
-83	0,003173	0,003327	0,003349	0,0033266238	0,0033266238
-82	0,003401	0,003563	0,003587	0,0035633548	0,0035633548
-81	0,003645	0,003817	0,003842	0,0038169322	0,0038169322
-80	0,003906	0,004089	0,004115	0,0040885548	0,0040885548
-79	0,004187	0,004380	0,004408	0,0043795068	0,0043795068
-78	0,004487	0,004691	0,004721	0,0046911636	0,0046911636
-77	0,004809	0,005025	0,005057	0,0050249987	0,0050249987
-76	0,005154	0,005383	0,005416	0,0053825904	0,0053825904
-75	0,005524	0,005766	0,005801	0,0057656292	0,0057656292
-74	0,005921	0,006176	0,006213	0,0061759261	0,0061759261
-73	0,006346	0,006615	0,006655	0,0066154207	0,0066154207
-72	0,006801	0,007086	0,007128	0,0070861908	0,0070861908
-71	0,007289	0,007590	0,007634	0,0075904622	0,0075904622
-70	0,007813	0,008131	0,008177	0,0081306188	0,0081306188
-69	0,008373	0,008709	0,008758	0,0087092143	0,0087092143
-68	0,008974	0,009329	0,009381	0,0093289841	0,0093289841
-67	0,009618	0,009993	0,010047	0,0099928583	0,0099928583
-66	0,010309	0,010704	0,010762	0,0107039755	0,0107039755
-65	0,011049	0,011466	0,011526	0,0114656976	0,0114656976
-64	0,011842	0,012282	0,012346	0,0122816258	0,0122816258
-63	0,012691	0,013156	0,013223	0,0131556175	0,0131556175
-62	0,013602	0,014092	0,014163	0,0140918047	0,0140918047
-61	0,014579	0,015095	0,015170	0,0150946133	0,0150946133
-60	0,015625	0,016169	0,016248	0,0161687844	0,0161687844
-59	0,016746	0,017319	0,017403	0,0173193962	0,0173193962
-58	0,017948	0,018552	0,018640	0,0185518884	0,0185518884
-57	0,019237	0,019872	0,019964	0,0198720880	0,0198720880
-56	0,020617	0,021286	0,021383	0,0212862363	0,0212862363
-55	0,022097	0,022801	0,022903	0,0228010189	0,0228010189
-54	0,023683	0,024424	0,024531	0,0244235974	0,0244235974
-53	0,025383	0,026162	0,026275	0,0261616427	0,0261616427
-52	0,027205	0,028023	0,028142	0,0280233717	0,0280233717
-51	0,029157	0,030018	0,030142	0,0300175860	0,0300175860
-50	0,031250	0,032154	0,032285	0,0321537137	0,0321537137
-49	0,033493	0,034442	0,034579	0,0344418537	0,0344418537
-48	0,035897	0,036893	0,037037	0,0368928236	0,0368928236
-47	0,038473	0,039518	0,039669	0,0395182107	0,0395182107
-46	0,041235	0,042330	0,042489	0,0423304270	0,0423304270
-45	0,044194	0,045343	0,045509	0,0453427678	0,0453427678
-44	0,047366	0,048569	0,048743	0,0485694744	0,0485694744
-43	0,050766	0,052026	0,052208	0,0520258017	0,0520258017
-42	0,054409	0,055728	0,055919	0,0557280900	0,0557280900
-41	0,058315	0,059694	0,059893	0,0596938425	0,0596938425
-40	0,062500	0,063942	0,064150	0,0639418081	0,0639418081
-39	0,066986	0,068492	0,068710	0,0684920697	0,0684920697
-38	0,071794	0,073366	0,073593	0,0733661395	0,0733661395
-37	0,076947	0,078587	0,078824	0,0785870605	0,0785870605
-36	0,082469	0,084180	0,084426	0,0841795155	0,0841795155
-35	0,088388	0,090170	0,090427	0,0901699437	0,0901699437

-34	0,094732	0,096587	0,096854	0,0965866661	0,0965866662
-33	0,101532	0,103460	0,103738	0,1034600188	0,1034600188
-32	0,108819	0,110822	0,111111	0,1108224968	0,1108224968
-31	0,116629	0,118709	0,119008	0,1187089073	0,1187089073
-30	0,125000	0,127157	0,127467	0,1271565349	0,1271565349
-29	0,133972	0,136205	0,136527	0,1362053172	0,1362053172
-28	0,143587	0,145898	0,146230	0,1458980337	0,1458980338
-27	0,153893	0,156281	0,156624	0,1562805087	0,1562805087
-26	0,164938	0,167402	0,167756	0,1674018269	0,1674018269
-25	0,176777	0,179315	0,179679	0,1793145665	0,1793145665
-24	0,189465	0,192075	0,192450	0,1920750468	0,1920750468
-23	0,203063	0,205744	0,206129	0,2057435954	0,2057435954
-22	0,217638	0,220385	0,220779	0,2203848326	0,2203848326
-21	0,233258	0,236068	0,236471	0,2360679775	0,2360679775
-20	0,250000	0,252867	0,253279	0,2528671748	0,2528671748
-19	0,267943	0,270862	0,271280	0,2708618458	0,2708618458
-18	0,287175	0,290137	0,290562	0,2901370632	0,2901370632
-17	0,307786	0,310784	0,311214	0,3107839541	0,3107839541
-16	0,329877	0,332900	0,333333	0,3329001303	0,3329001303
-15	0,353553	0,356590	0,357025	0,3565901498	0,3565901498
-14	0,378929	0,381966	0,382401	0,3819660112	0,3819660113
-13	0,406126	0,409148	0,409580	0,4091476835	0,4091476835
-12	0,435275	0,438264	0,438691	0,4382636727	0,4382636727
-11	0,466516	0,469452	0,469872	0,4694516297	0,4694516297
-10	0,500000	0,502859	0,503268	0,5028590010	0,5028590010
-9	0,535887	0,538644	0,539038	0,5386437257	0,5386437257
-8	0,574349	0,576975	0,577350	0,5769749824	0,5769749824
-7	0,615572	0,618034	0,618386	0,6180339887	0,6180339887
-6	0,659754	0,662015	0,662338	0,6620148584	0,6620148584
-5	0,707107	0,709126	0,709414	0,7091255185	0,7091255185
-4	0,757858	0,759589	0,759836	0,7595886929	0,7595886929
-3	0,812252	0,813643	0,813841	0,8136429551	0,8136429551
-2	0,870551	0,871544	0,871686	0,8715438560	0,8715438560
-1	0,933033	0,933565	0,933641	0,9335651322	0,9335651322
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,0000000000	1,0000000000
1	1,071773	1,071163	1,071075	1,0711625419	1,0711625419
2	1,148698	1,147389	1,147203	1,1473891912	1,1473891912
3	1,231144	1,229040	1,228741	1,2290403226	1,2290403226
4	1,319508	1,316502	1,316074	1,3165019561	1,3165019560
5	1,414214	1,410188	1,409615	1,4101875817	1,4101875817
6	1,515717	1,510540	1,509804	1,5105401146	1,5105401145
7	1,624505	1,618034	1,617114	1,6180339888	1,6180339887
8	1,741101	1,733177	1,732051	1,7331774003	1,7331774003
9	1,866066	1,856515	1,855157	1,8565147097	1,8565147097
10	2,000000	1,988629	1,987013	1,9886290155	1,9886290155
11	2,143547	2,130145	2,128241	2,1301449112	2,1301449111
12	2,297397	2,281731	2,279507	2,2817314377	2,2817314377
13	2,462289	2,444105	2,441524	2,4441052467	2,4441052467
14	2,639016	2,618034	2,615057	2,6180339888	2,6180339887
15	2,828427	2,804340	2,800923	2,8043399422	2,8043399422
16	3,031433	3,003904	3,000000	3,0039039009	3,0039039008
17	3,249010	3,217669	3,213226	3,2176693381	3,2176693381
18	3,482202	3,446647	3,441608	3,4466468672	3,4466468672

19	3,732132	3,691919	3,686222	3,6919190194	3,6919190193
20	4,000000	3,954645	3,948222	3,9546453613	3,9546453613
21	4,287094	4,236068	4,228844	4,2360679775	4,2360679775
22	4,594793	4,537517	4,529411	4,5375173425	4,5375173425
23	4,924578	4,860419	4,851341	4,8604186106	4,8604186105
24	5,278032	5,206298	5,196152	5,2062983536	5,2062983536
25	5,656854	5,576792	5,565471	5,5767917784	5,5767917783
26	6,062866	5,973650	5,961040	5,9736504571	5,9736504570
27	6,498019	6,398751	6,384724	6,3987506080	6,3987506080
28	6,964405	6,854102	6,838521	6,8541019664	6,8541019662
29	7,464264	7,341857	7,324572	7,3418572848	7,3418572847
30	8,000000	7,864323	7,845170	7,8643225115	7,8643225114
31	8,574188	8,423968	8,402769	8,4239676918	8,4239676916
32	9,189587	9,023439	9,000000	9,0234386457	9,0234386455
33	9,849155	9,665569	9,639679	9,6655694765	9,6655694763
34	10,556063	10,353396	10,324824	10,3533959694	10,3533959692
35	11,313708	11,090170	11,058666	11,0901699440	11,0901699437
36	12,125733	11,879375	11,844666	11,8793746274	11,8793746271
37	12,996038	12,724741	12,686531	12,7247411221	12,7247411219
38	13,928809	13,630266	13,588233	13,6302660455	13,6302660452
39	14,928528	14,600230	14,554023	14,6002304242	14,6002304239
40	16,000000	15,639220	15,588457	15,6392199336	15,6392199333
41	17,148375	16,752147	16,696414	16,7521465775	16,7521465772
42	18,379174	17,944272	17,883120	17,9442719104	17,9442719100
43	19,698311	19,221232	19,154172	19,2212319122	19,2212319118
44	21,112127	20,589064	20,515564	20,5890636337	20,5890636332
45	22,627417	22,054234	21,973717	22,0542337374	22,0542337369
46	24,251465	23,623669	23,535510	23,6236690700	23,6236690694
47	25,992077	25,304789	25,208307	25,3047894102	25,3047894096
48	27,857618	27,105543	27,000000	27,1055425471	27,1055425464
49	29,857056	29,034442	28,919038	29,0344418545	29,0344418537
50	32,000000	31,100607	30,974473	31,1006065398	31,1006065389
51	34,296751	33,313805	33,175998	33,3138047560	33,3138047551
52	36,758347	35,684500	35,533998	35,6844997831	35,6844997821
53	39,396621	38,223900	38,059594	38,2238994944	38,2238994933
54	42,224253	40,944009	40,764699	40,9440093440	40,9440093428
55	45,254834	43,857689	43,662069	43,8576891248	43,8576891235
56	48,502930	46,978714	46,765372	46,9787137652	46,9787137637
57	51,984153	50,321839	50,089243	50,3218384523	50,3218384507
58	55,715236	53,902868	53,649360	53,9028683900	53,9028683883
59	59,714111	57,738734	57,462515	57,7387335208	57,7387335189
60	64,000000	61,847569	61,546691	61,8475685647	61,8475685627
61	68,593502	66,248799	65,921151	66,2487987545	66,2487987524
62	73,516695	70,963232	70,606529	70,9632316723	70,9632316699
63	78,793242	76,013156	75,624922	76,0131556201	76,0131556175

Notiamo, successivamente, le sequenze di Lucas e Fibonacci. Dividendo i numeri fra di loro otteniamo 2,2306...che è  $\Phi^{-3}+2$ .

<b>Fibonacci</b>	<b>Lucas</b>	<b>Rapporto</b>
0	2	
1	1	<b>1,000000</b>
1	3	<b>3,000000</b>
2	4	<b>2,000000</b>
3	7	<b>2,333333</b>
5	11	<b>2,200000</b>
8	18	<b>2,250000</b>
13	29	<b>2,230769</b>
21	47	<b>2,238095</b>
34	76	<b>2,235294</b>
55	123	<b>2,236364</b>
89	199	<b>2,235955</b>
144	322	<b>2,236111</b>
233	521	<b>2,236052</b>
377	843	<b>2,236074</b>
610	1364	<b>2,236066</b>
987	2207	<b>2,236069</b>
1597	3571	<b>2,236068</b>
2584	5778	<b>2,236068</b>
4181	9349	<b>2,236068</b>
6765	15127	<b>2,236068</b>
10946	24476	<b>2,236068</b>
17711	39603	<b>2,236068</b>
28657	64079	<b>2,236068</b>
46368	103682	<b>2,236068</b>
75025	167761	<b>2,236068</b>
121393	271443	<b>2,236068</b>
196418	439204	<b>2,236068</b>
317811	710647	<b>2,236068</b>
514229	1149851	<b>2,236068</b>
832040	1860498	<b>2,236068</b>

Nella prossima tabella, vengono evidenziate le interessanti connessioni matematiche tra la serie di Lucas, le potenze di  $\Phi$  ed i numeri di Fibonacci.

<b>Esponente</b>	<b>Potenze di Phi</b>				
-15	0,0007331374				
-14	0,0011862413				
-13	0,0019193787				
-12	0,0031056200				
-11	0,0050249987				
-10	0,0081306188				
-9	0,0131556175				
-8	0,0212862363				
-7	0,0344418537				
-6	0,0557280900				
-5	0,0901699437				
-4	0,1458980338				
-3	0,2360679775				
-2	0,3819660113	<b>Lucas</b>	<b>Fibonacci</b>	<b>Potenza di Phi meno Lucas diventa Potenza di Phi</b>	<b>Lucas meno Fibonacci diventa Fibonacci</b>
-1	0,6180339887		0		
0	1,0000000000	2	1		1
1	1,6180339887	1	1	0,6180339887	0
2	2,6180339887	3	2	-0,3819660113	1
3	4,2360679775	4	3	0,2360679775	1
4	6,8541019662	7	5	-0,1458980338	2
5	11,0901699437	11	8	0,0901699437	3
6	17,9442719100	18	13	-0,0557280900	5
7	29,0344418537	29	21	0,0344418537	8
8	46,9787137637	47	34	-0,0212862363	13
9	76,0131556175	76	55	0,0131556175	21
10	122,9918693812	123	89	-0,0081306188	34
11	199,0050249987	199	144	0,0050249987	55
12	321,9968943800	322	233	-0,0031056200	89
13	521,0019193787	521	377	0,0019193787	144
14	842,9988137587	843	610	-0,0011862413	233
15	1364,0007331374	1364	987	0,0007331374	377

## Tavola dei Numeri Primi da 2 a 5000 e Grafico risultante

	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	1009
1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063
1069	1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129
1151	1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217
1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289
1291	1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367
1373	1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447
1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499
1511	1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579
1583	1597	1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637
1657	1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723
1733	1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801
1811	1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879
1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979
1987	1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039
2053	2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113
2129	2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207
2213	2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281
2287	2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351
2357	2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417
2423	2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521
2531	2539	2543	2549	2551	2557	2579	2591	2593	2609
2617	2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683
2687	2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731
2741	2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797	2801	2803
2819	2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897
2903	2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971
2999	3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067
3079	3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169
3181	3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253
3257	3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329
3331	3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407
3413	3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499
3511	3517	3527	3529	3533	3539	3541	3547	3557	3559
3571	3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637
3643	3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719
3727	3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797	3803

3821	3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889
3907	3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967
3989	4001	4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051
4057	4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133
4139	4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229
4231	4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273	4283	4289
4297	4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397
4409	4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483
4493	4507	4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567
4583	4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649	4651
4657	4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733
4751	4759	4783	4787	4789	4793	4799	4801	4813	4817
4831	4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933
4937	4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999

Se rappresentiamo la distribuzione dei numeri primi su un grafico, disponendo in ascissa la sequenza dei numeri ordinali ed in ordinata il rispettivo numero primo, otteniamo la seguente curva:

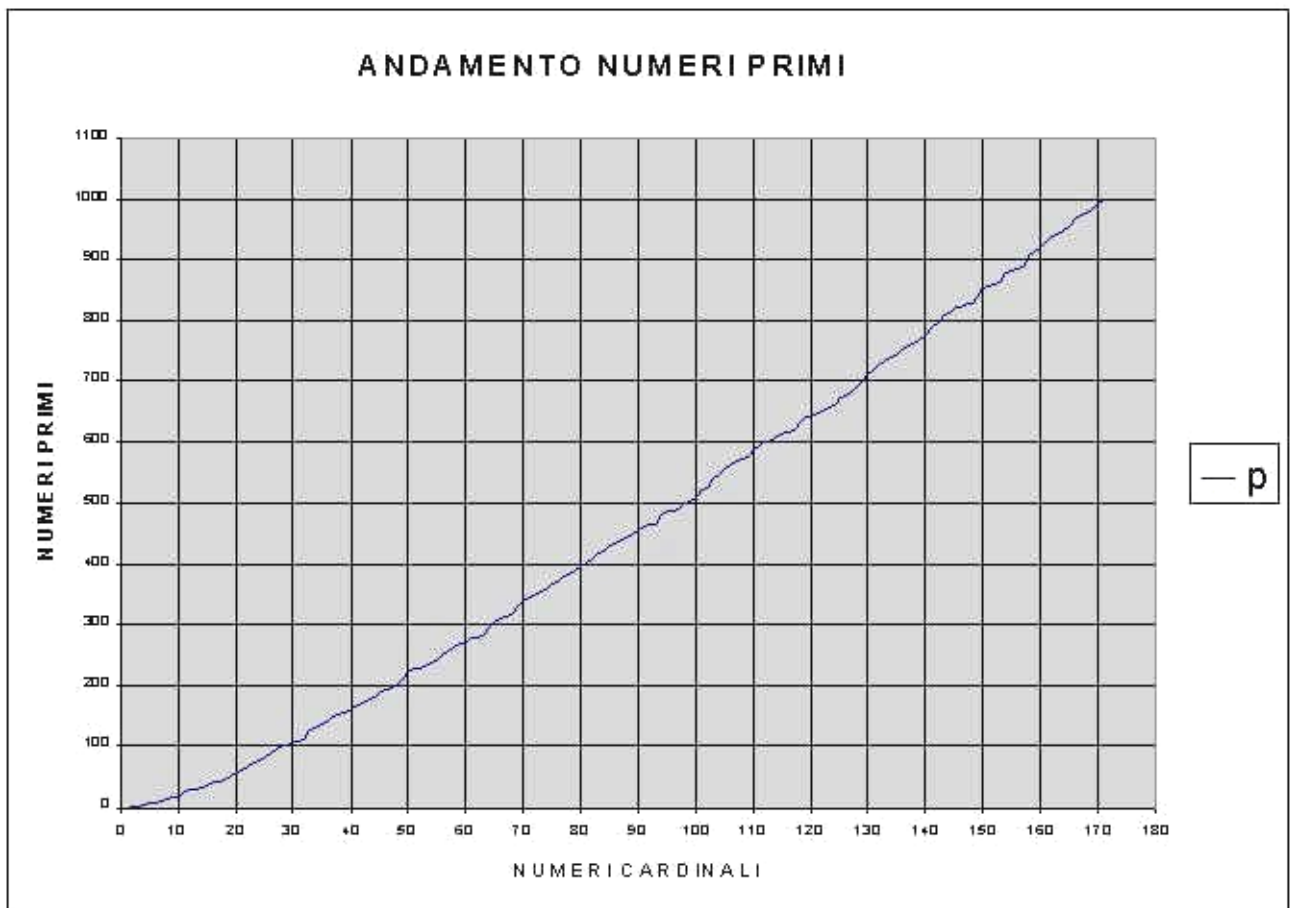


fig. 1



Nel grafico (fig. 1) , non considerando la parte iniziale fino a  $n = 20$ , la linea di tendenza sembra essere una retta o un' iperbole con una curvatura molto ampia. Sembrerebbe quindi facile determinare un algoritmo che permetta di calcolare un numero primo, in funzione di  $n$ .

In realtà qualsiasi formula che noi possiamo definire, non darà mai un risultato esatto per tutti i numeri primi, come se la regola che li unisce tendesse a sfuggire ad ogni logica matematica.

Questo è sempre stato il tormento dei matematici che hanno, da secoli, cercato di inquadrali in una regola che ne determinasse la successione.

Eulero, matematico svizzero del settecento, professore all'università di Pietroburgo, propose alcuni algoritmi che davano come risultato alcuni numeri primi. Questi sono i primi due del seguente schema:

1) $n^2 + n + 41$	2) $n^2 + n + 17$
3) $6n + 1$	4) $6n - 1$

Anche gli algoritmi 3) e 4) sono molto validi e, cosa interessante, per  $n =$  numeri della sequenza di Fibonacci oppure  $n =$  numeri della sequenza di Lucas, si ottengono ulteriori numeri primi.

Se andiamo ad analizzare il risultato delle formule ci rendiamo conto, però, che nei primi 50 numeri le formule non danno sempre come risultato un numero primo.

Marin Mersenne, un frate matematico parigino del Seicento, scoprì un'altra formula che dava molti numeri primi:

$$p' = 2^p - 1$$

dove  $p$  è un numero primo già noto.

Per esempio: con  $p = 5$  si ottiene  $p' = 31$ , con  $p = 7$  si ottiene 127, con  $p = 13$  si ottiene 8191, e così via.

Molti matematici prima del '500 ritenevano che tutti i numeri di Mersenne fossero a loro volta dei numeri primi, ma, a partire dal '500, sono stati trovati molti numeri di Mersenne non primi (ad esempio  $2^{11} - 1$ ,  $2^{23} - 1$ ,  $2^{29} - 1$ ). Tuttavia i numeri di Mersenne rimangono "interessanti", sia perché la relativa formula viene utilizzata per scoprire i numeri perfetti, ma soprattutto perché esistono test di primalità per numeri di questa forma che hanno reso possibile verificare la primalità di numeri molto grandi. Anzi i numeri primi più grandi che si conoscono sono tutti numeri di Mersenne e numeri perfetti.

Finora nessuno ancora è riuscito a determinare una formula che generi numeri primi. Anche la tecnica utilizzata dal progetto GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) non è molto più sofisticata di un metodo vecchio di duemila anni detto "il crivello di Eratostene", ideato da Eratostene di Alessandria, matematico, filosofo e poeta greco, vissuto nel II secolo a.C.. L'idea del crivello è molto semplice. Si tratta di mettere in fila tutti i numeri dispari (quelli pari possono essere esclusi poiché, si sa, sono multipli di 2), fino al limite stabilito, eliminando poi, come non primi, un numero ogni tre dopo il 3 (cioè i multipli di 3), un numero ogni cinque dopo il 5 (cioè i multipli di 5) e così via. I numeri che rimarranno dopo questa operazione, saranno certamente primi. E' evidente però che questo metodo, seppur semplice, è fattibile finché si lavora con numeri di poche cifre: con numeri più grandi i tempi di "crivellatura" si allungano in maniera esasperante.

Ecco quindi che solo il calcolatore, con la sua straordinaria velocità di calcolo, ci permette oggi di compiere calcoli lunghi e tedious, e di elaborare numeri con migliaia di cifre in modo da farci progredire nella conoscenza e nello studio dei numeri primi.

Il più grande numero primo fino ad oggi conosciuto è un numero di oltre 4 milioni di cifre formato da  $2^{13.466.917}$ . La scoperta è naturalmente opera del GIMPS, un progetto che per due anni e mezzo ha collegato 4000 computer di appassionati di tutto il mondo ognuno dei quali aveva il compito di esaminare un intervallo di numeri. Il fortunato scopritore è Michael Cameron, un ventenne studente canadese che, per mezzo del suo AMD 800, ha annunciato la scoperta il 14 novembre del 2001.

Abbiamo inserito la tabella dei numeri primi da 2 a 5000, in quanto sono state ottenute delle interessanti connessioni tra l'analisi del grafico inerente i numeri primi, precisamente, tra i valori della Y prevista e dei residui che riguardano la statistica della regressione dei primi 500 numeri primi e le potenze di *Phi* connesse al sistema musicale a sette note.

Da recenti lavori sono state evidenziate con notevole ricorrenza le connessioni matematiche tra alcuni settori della Teoria delle Stringhe , diverse equazioni inerenti la funzione zeta di Riemann (legata ai numeri primi), e varie funzioni in cui compare la Sezione aurea = 0,6180339 ed il Rapporto aureo = 1,6180339 a loro volta collegati con la nota “successione di Fibonacci”.

La domanda che ci si pone è: quale principio matematico e/o fisico è alla base di tali correlazioni?

Sappiamo che, per quanto concerne i modi delle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica, questi sono uguali a 24 (le dimensioni sono  $26 = 24 + 2$ ), mentre quelli inerenti le vibrazioni fisiche delle superstringhe, essi sono 8 (le dimensioni sono  $10 = 8 + 2$ ). Notiamo anche che  $24 = 8 \cdot 3$ , e che 8 è un numero di Fibonacci.

Inoltre, l’equazione che lega in corrispondenza biunivoca le stringhe bosoniche e le superstringhe, detta “Palumbo-Nardelli” (dall’omonimo modello) è connessa con quella di Einstein che lega la massa all’energia. Difatti come per l’equazione di Einstein l’energia e la massa sono interscambiabili, per l’equazione che è alla base del modello Palumbo-Nardelli, le stringhe bosoniche (quindi i bosoni, cioè le particelle mediatrici delle forze: fotoni, gravitoni, bosoni  $W^\pm$  e  $Z^0$  e gluoni) generano le stringhe fermioniche (quindi i fermioni, cioè le particelle di cui è costituita la materia: elettroni, protoni, neutroni, neutrini, quarks) e viceversa.

La relazione Palumbo-Nardelli è la seguente:

$$\begin{aligned}
 & - \int d^{26}x \sqrt{g} \left[ -\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} Tr(G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}) f(\phi) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] = \\
 & = \int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[ R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} Tr_v(|F_2|^2) \right], \quad (1)
 \end{aligned}$$

La teoria delle partizioni ed il lavoro svolto da Ramanujan in quel ramo della matematica conosciuto come “forme modulari” si sono dimostrati essenziali nell’esame della matematica necessaria a descrivere le stringhe. L’opera dell’eccezionale matematico indiano sulle partizioni, sul modo in cui numeri più piccoli si combinano per formarne di più grandi, riguarda quel processo in cui “subunità” più corte, di lunghezza variabile, si

sommano per costituire un tutto. È questo anche il caso delle stringhe, entità piccolissime che si “combinano” per formare entità più grandi (quarks), e così via fino alla materia e all’energia. Allora è possibile connettere al modello Palumbo-Nardelli anche la formula delle partizioni ottenuta da Ramanujan. Otterremo quindi:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[ R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} Tr_\nu (|F_2|^2) \right] = \\
& = - \int d^{26}x \sqrt{g} \left[ -\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} Tr(G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}) f(\phi) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{1 \leq k \leq N} \sqrt{k} \left( \sum_{h \bmod k} \omega_{h,k} e^{-2\pi i \frac{hn}{k}} \right) \frac{d}{dn} \left( \frac{\cosh \left( \frac{\pi \sqrt{n - \frac{1}{24}}}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 1}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) + O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right). \quad (2)
\end{aligned}$$

È interessante notare che quando una stringa si muove nello spazio-tempo e si divide e si ricombina, un gran numero di identità matematiche devono essere soddisfatte. Queste sono le identità di Ramanujan in funzione modulare. Il diagramma a “loop” KSV (Kikkawa-Sakita-Virasoro) di interazione tra le stringhe può essere descritto usando le funzioni modulari. Come già detto precedentemente, la “funzione di Ramanujan” (una funzione modulare ellittica che soddisfa la “simmetria conforme”) ha 24 “modalità” che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica.

Quando la funzione di Ramanujan è generalizzata, 24 è sostituito da 8, quindi, ha 8 “modalità” che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una superstringa.

Le altre due equazioni modulari di Ramanujan, che corrispondono ai due valori inerenti le vibrazioni fisiche delle stringhe bosoniche e delle superstringhe sono:

per il numero 24:

$$24 = \frac{4 \left[ \text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log \left[ \sqrt{\left( \frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left( \frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]}. \quad (3)$$

e per il numero 8:

$$8 = \frac{1}{3} \frac{4 \left[ \text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log \left[ \sqrt{\left( \frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left( \frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]}. \quad (4)$$

Per quanto concerne la connessione tra la Teoria delle Stringhe e la funzione zeta di Riemann, è utile descrivere brevemente quelle che si definiscono zeta-stringhe.

L'equazione del moto per la zeta-stringa  $\phi$  è

$$\zeta\left(\frac{\square}{2}\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{k_0^2 - \bar{k}^2 > 2+\varepsilon} e^{ik_0 t} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk = \frac{\phi}{1-\phi} \quad (5)$$

che ha un'evidente soluzione  $\phi = 0$ .

Per il caso di soluzioni omogenee spazialmente dipendenti dal tempo, abbiamo la seguente equazione di moto

$$\zeta\left(\frac{-\partial_t^2}{2}\right)\phi(t) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{|k_0| > \sqrt{2}+\varepsilon} e^{-ik_0 t} \zeta\left(\frac{k_0^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k_0) dk_0 = \frac{\phi(t)}{1-\phi(t)}. \quad (6)$$

Per quanto concerne le zeta-stringhe scalari aperte e chiuse, le equazioni del moto sono

$$\zeta\left(\frac{\square}{2}\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{ikx} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk = \sum_{n \geq 1} \theta^{\frac{n(n-1)}{2}} \phi^n, \quad (7)$$

$$\zeta\left(\frac{\square}{4}\right)\theta = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{ikx} \zeta\left(-\frac{k^2}{4}\right) \tilde{\theta}(k) dk = \sum_{n \geq 1} \left[ \theta^{n^2} + \frac{n(n-1)}{2(n+1)} \theta^{\frac{n(n-1)}{2}-1} (\phi^{n+1} - 1) \right], \quad (8)$$

e si può facilmente osservare la soluzione banale  $\phi = \theta = 0$ .

Vi sono ulteriori connessioni matematiche che vale la pena di andare a descrivere ed analizzare. L'Ing. Christian Lange ha ottenuto alcuni risultati lavorando sul numero 432, corrispondente alla frequenza del La naturale (ricordiamo che  $432 = 2^4 \cdot 3^3$ ). Dividendo 432 per  $\pi$ , si ottiene 137,5 un valore molto vicino a quello della Costante di Struttura Fine, di importanza fondamentale nella fisica teorica e nella cosmologia, in quanto ha un ruolo di primo piano nelle teorie delle stringhe e del multiverso. Inoltre, dividendo 432 per  $\Phi$  e per  $\Phi^2$  si ottengono rispettivamente i numeri 267 e 165. Le somme di tali numeri forniscono nuovamente 432, e notiamo anche come

$$\frac{432}{\Phi} + \frac{432}{\Phi^2} = 432; \quad 432 \left( \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} \right) = 432; \quad \left( \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} \right) = 1$$

che è un'ulteriore modo di ottenere 1 dal rapporto aureo. Si osserva anche che i numeri 267 e 165 sono dati da somme di numeri di Fibonacci. Infatti:

$$267 = 233 + 34 \quad \text{e} \quad 165 = 144 + 21 \quad (233 = 89 + 144; \quad 144 = 55 + 89).$$

Ma si è ottenuta anche una nuova connessione matematica tra  $\Phi$  e  $\pi$ . Infatti abbiamo che:

$$\Phi^2 \cdot \frac{6}{5} = \pi; \quad \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^2 \cdot \frac{3 \times 2}{5} = \frac{(3+\sqrt{5}) \times 3}{5} = \pi.$$

Da tutto ciò sembra che  $\Phi$  e  $\pi$  siano tra loro matematicamente connessi tramite i numeri primi 2, 3 e 5. Per quanto riguarda invece la connessione tra la frequenza del La naturale

di 432 Hz con  $\pi$ , con  $\Phi$  e con il valore molto vicino (se non forse più preciso) della Costante di Struttura Fine, questa potrà essere utilizzata nelle equazioni della teoria delle stringhe, in cui compare la “pendenza di Regge”  $\alpha'$  che a sua volta è strettamente correlata alla Costante di Struttura Fine. A questo proposito, osserviamo che la tensione  $T$  della stringa è data da:

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

Anche in questa formula, come si vede, compaiono sia la “pendenza di Regge” sia  $\pi$ . Ricordiamo che in teoria di stringa, la relazione di Regge è:

$$J = \alpha' E^2 \approx \frac{G^* m^2}{2\alpha\hbar c} = \frac{1}{\hbar c T} E^2$$

In essa lo spin è adimensionale,  $\alpha'$  è la “pendenza di Regge” in dimensioni di energia<sup>-2</sup>,  $T$  è la tensione di stringa con dimensioni di energia per unità di lunghezza,  $G^*$  è la costante gravitazionale di Newton dell'iperspazio dilatato. Già da questa formula possiamo notare come  $\alpha$  ed  $\alpha'$  siano connessi. Infatti otteniamo che:

$$\alpha = \frac{G^* m^2}{2\hbar c \alpha' E^2}; \quad \alpha' = \frac{G^* m^2}{2\hbar c \alpha E^2}$$

Un'ulteriore connessione matematica, certamente molto più importante, si è ottenuta tra  $\pi$ ,  $\Phi$  con la costante gravitazionale  $G = 6,673$ . Abbiamo infatti che:

$$\sqrt{6,673 + 2\Phi} \cong \pi, \quad \text{da cui abbiamo che } (\pi^2) - 2\Phi \cong 6,673 = G.$$

Inoltre, abbiamo che:

$$\left( \frac{306,342224}{48} + \frac{1}{2}\phi \right) = 6,382129667 + 0,30901695 = 6,69114;$$

$$\left( \frac{432}{8^2} - \frac{8}{10^2} \right) = 6,75 - 0,08 = 6,67$$

valori vicinissimi (l'ultimo coincide addirittura) a quello della costante  $G$ .

Questa connessione è certamente molto importante in quanto la suddetta costante è usata sia nel micro che nel macro-cosmo, quindi sia in fisica delle particelle sia in cosmologia (relatività generale, Teoria delle Stringhe).

La novità nelle connessioni matematiche prima menzionate, risiede nella seguente analisi che è stata svolta sui primi 5000 numeri primi. È stata praticamente attuata l'analisi dei dati sul grafico dei su citati numeri primi con il metodo della "regressione" e si è studiato il grafico relativo ai valori inerenti i residui. È risultato che "tutti" i valori non sono altro che somme di potenze di  $\varphi$  e di  $\Phi$  (quindi della Sezione aurea e del Rapporto aureo): quindi connessione matematica perfetta tra numeri primi e numero aureo.

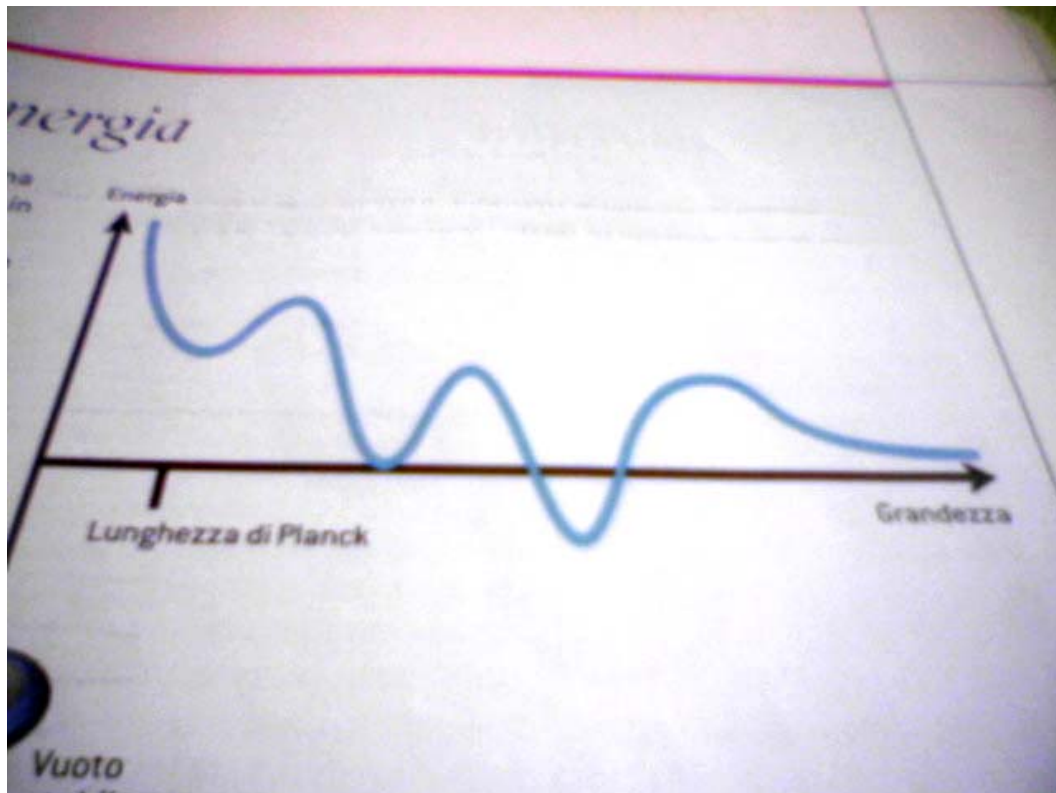
Come esempio riportiamo nella seguente tabella i primi trenta valori dei residui (colonna 1) connessi con le potenze di *Phi* (colonne 2, 3 e 4):

<i>Residui</i>	<i>Potenze di phi</i>	<i>Potenze di phi</i>	<i>Potenze di phi</i>
-2,845395769	2,804340	0,042330	
-6,690791539	6,398750608	0,290137063	
-9,536187308	9,023438646	0,502859001	
-12,38158308	11,87937463	0,502859001	
-13,22697885	12,72474112	0,502859001	
-16,07237462	15,63921993	0,438263673	
-16,91777038	16,75214658	0,167401827	
-19,76316615	19,22123191	0,538643726	
-20,60856192	20,58906363	0,019872064	
-19,45395769	19,22123191	0,236067977	
-22,29935346	22,05423374	0,236067977	
-21,14474923	20,58906363	0,502859001	0,055728
-21,990145	20,58906363	1,410187582	
-24,83554077	23,62366907	1,147389191	0,063942
-25,68093654	25,30478941	0,381966011	
-24,52633231	23,62366907	0,813642955	0,084180
-23,37172808	22,05423374	1,316501956	
-26,21712385	25,30478941	0,709125518	0,205744
-25,06251962	23,62366907	1,316501956	0,127157
-25,90791539	23,62366907	2,281731438	
-28,75331115	25,30478941	3,446646867	
-27,59870692	25,30478941	2,281731438	
-28,44410269	22,05423374	6,398750608	
-27,28949846	25,30478941	1,988629015	
-24,13489423	23,62366907	0,33290013	0,179315
-24,98029	23,62366907	1,316501956	0,048569
-27,82568577	25,30478941	2,281731438	0,236068
-28,67108154	27,10554255	1,147389191	0,409148
-31,51647731	31,10060654	0,409147684	
-32,36187308	29,03444185	3,217669338	0,118709



Ma il risultato più notevole è stato quello relativo alla connessione che è scaturita dal confronto del grafico lineare inerente il “Paesaggio” della Teoria delle Stringhe ed il grafico dei residui.

Grafico del paesaggio della Teoria delle Stringhe



Un paesaggio si manifesta quando l'energia di ciascuna possibile soluzione delle stringhe è riportata in grafico in funzione dei parametri che definiscono la varietà esadimensionale ad essa associata. (Tale varietà è praticamente lo spazio di Calabi-Yau a 6 dimensioni. Notiamo come anche qui ci sia il numero 6, che è nella formula  $6n \pm 1$  inerente la generazione dei numeri primi). Facendo variare soltanto un parametro, per esempio la grandezza complessiva di quella varietà, il paesaggio forma un grafico lineare. Qui tre particolari valori di grandezza (tutti vicini alla scala di Planck) hanno energie che cadono nei ventri, o minimi, della curva. La varietà tenderà a regolare la propria grandezza in modo da collocarsi in uno dei minimi, come una palla che rotola su un pendio.

È interessante evidenziare come l'immagine speculare del grafico lineare sopra riportato sia matematicamente correlata al grafico dei residui inerenti l'analisi dei dati per i numeri

primi da 2 a 500. Quest'ultimo grafico è inoltre connesso con i valori risultanti dalle somme di determinate potenze di  $\Phi$ .

Grafico dei residui inerenti l'analisi dei dati per i numeri primi da 2 a 500

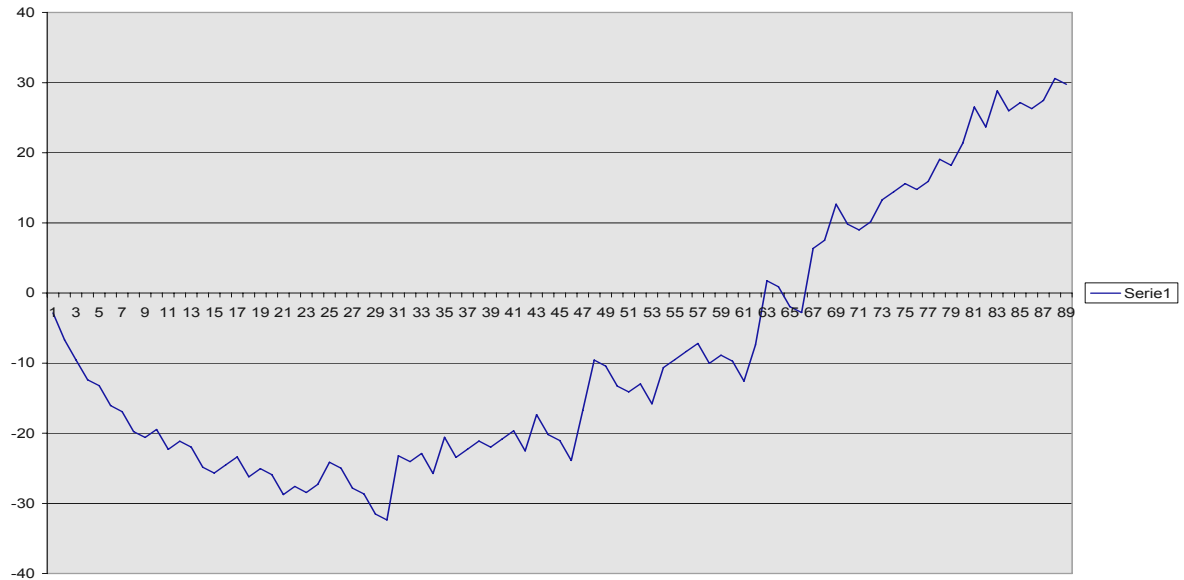
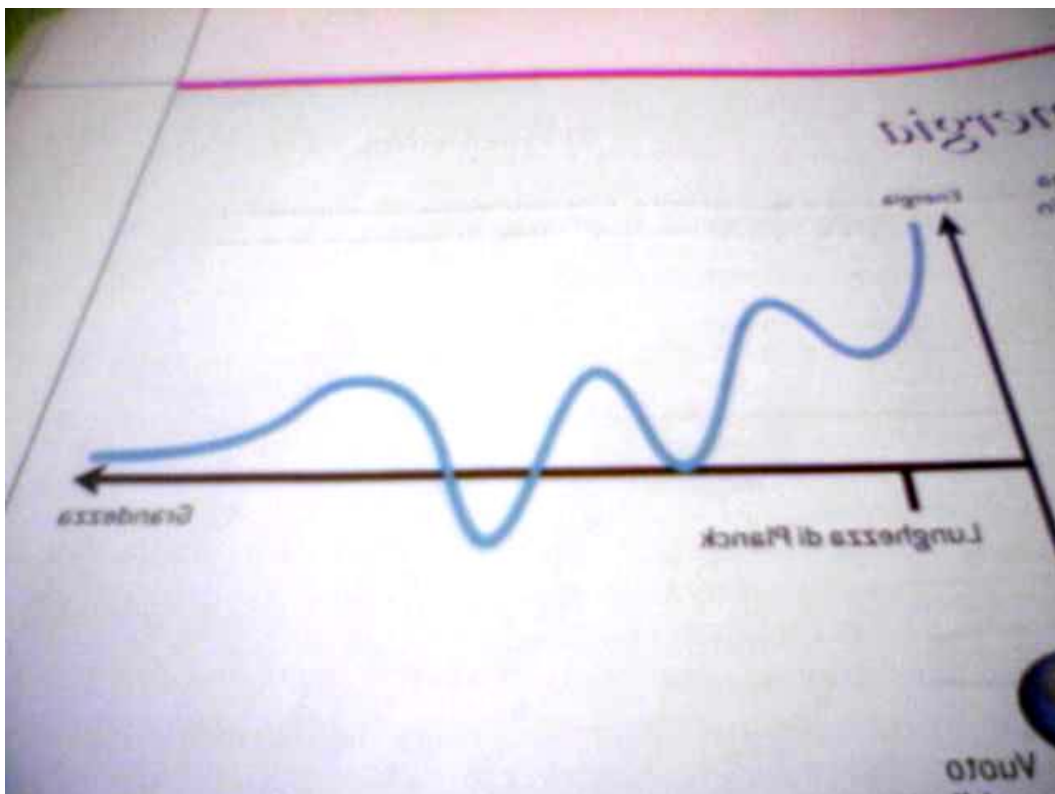


Grafico del paesaggio della Teoria delle Stringhe (immagine speculare)



La correlazione tra le due funzioni è impressionante. Ma, per quanto detto in precedenza, e cioè che esiste una forte connessione tra Numeri Primi, Sezione Aurea/Rapporto Aureo ed alcuni settori della Teoria delle stringhe, questo importante risultato che è stato ottenuto non fa altro che rafforzare ed anche spiegare il principio matematico alla base di tali correlazioni. Sembrano infatti i numeri primi (e la connessa funzione zeta di Riemann) essere il “fondamento” dell’intera struttura matematica che è alla base della Teoria delle Stringhe e tale “coerenza” matematica non fa altro che rafforzare la Teoria delle Stringhe che diviene più realistica e provabile, almeno dal punto di vista matematico, come futura Teoria del Tutto.

## **Sistema musicale $\Phi^{(n/7)}$ e la geometria del Nautilus**

La conchiglia del nautilus è forse il più bel esempio di spirale logaritmica in natura. La forma è data dal fatto che l'animale, che occupa solo l'ultima camera del guscio, crescendo, mantiene sempre le stesse proporzioni. La sezione del guscio del Nautilus segue la spirale logaritmica, a dimostrazione del fatto che la sezione aurea rappresenta l'espressione matematica della bellezza in natura.

All'interno del nicchio sono presenti circa 34-36 zone divise da pareti di madreperla, chiamate setti, che aumentano di numero con l'aumentare dell'età: sono le camere che il corpo dell'animale occupa mano a mano che aumenta di dimensione.



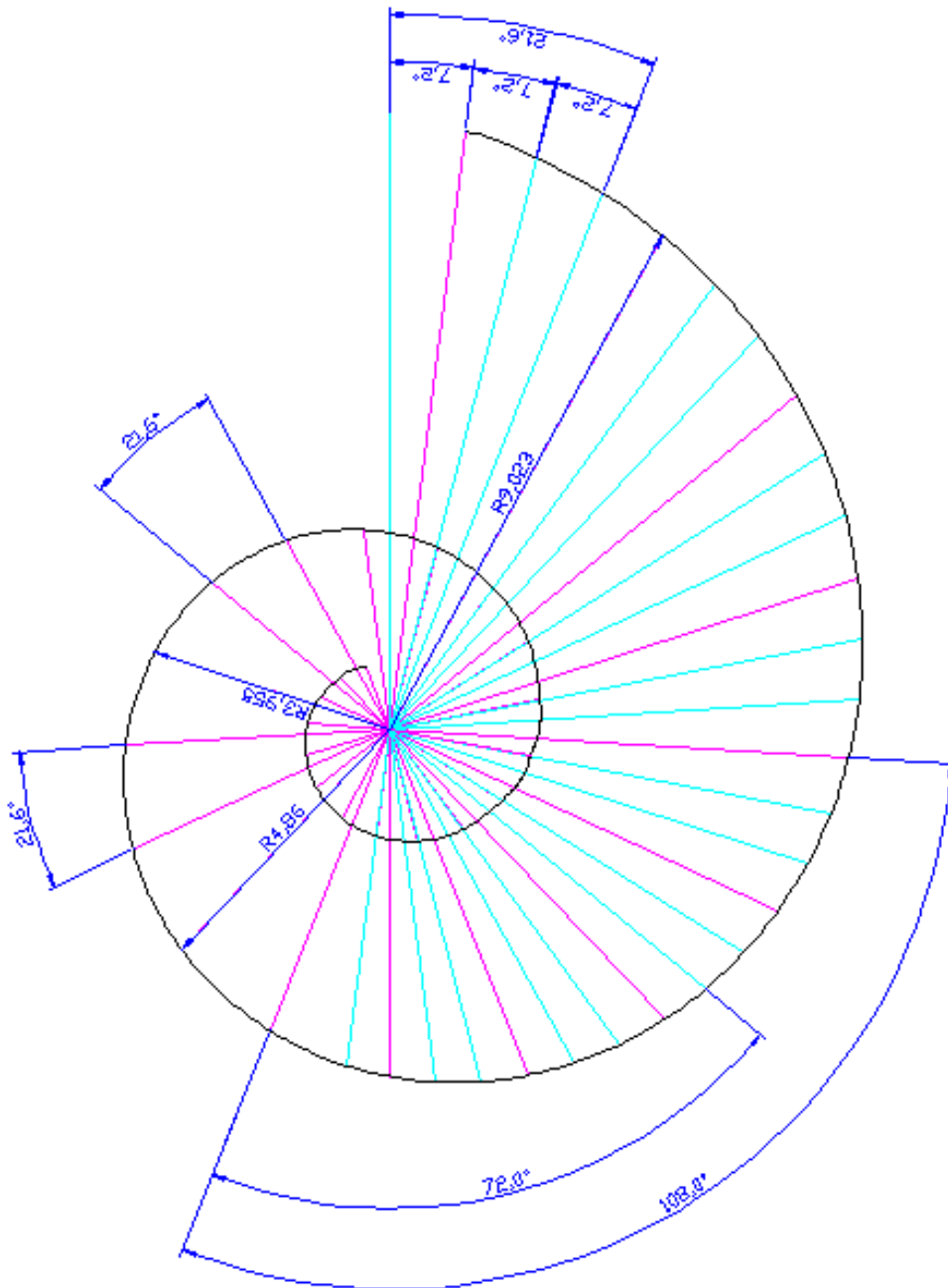
Il sistema musicale è rappresentabile con coordinate polari secondo una spirale logaritmica. Le “note” con le relative frequenze sono rappresentabili come distanza fra centro e circonferenza del Nautilus ideale. In natura è molto difficile trovare un Nautilus che segue esattamente la spirale logaritmica rispettando perfettamente il rapporto  $\Phi$ ; come anche le proporzioni del nostro corpo e del nostro viso si avvicinano a  $\Phi$ , ma non per questo siamo tutti uguali.

A questo punto, ispirati dal Nautilus, cerchiamo una spirale logaritmica che ci permette di rappresentare il sistema musicale  $\Phi^{(n/7)}$  con coordinate polari, per generare ulteriori connessioni matematiche.

La spirale logaritmica ha la particolarità di essere equi-angolare. Considerando le distanze fra il centro della spirale e i punti di connessione dei setti con la curva esterna del guscio, si può notare come l'angolo fra un segmento e l'altro, che corrisponde a  $21,6^\circ$ ,

fornisce delle connessioni interessanti. In questo caso, l'ottavo segmento ha una distanza pari a 1,618 volte quella del primo. Tutto ciò corrisponde perfettamente alla natura del nostro sistema musicale  $\Phi^{(n/7)}$ , caratterizzato da 7 suoni per ogni intervallo  $\Phi$ .

L'ampiezza dell'angolo di ogni segmento pari a  $21,6^\circ$  non è casuale: dividendo ulteriormente ogni segmento in tre, si ottiene un angolo di  $7,2^\circ$  ( $21,6^\circ / 3 = 7,2^\circ$ ), che corrisponde a un decimo dell'angolo base di  $72^\circ$  del pentagono che include il valore esatto della sezione aurea.



Nel disegno le linee di color fucsia corrispondono a segmenti di  $21,6^\circ$  mentre le linee celesti dividono questi segmenti per 3, creando un angolo di  $7,2^\circ$ .

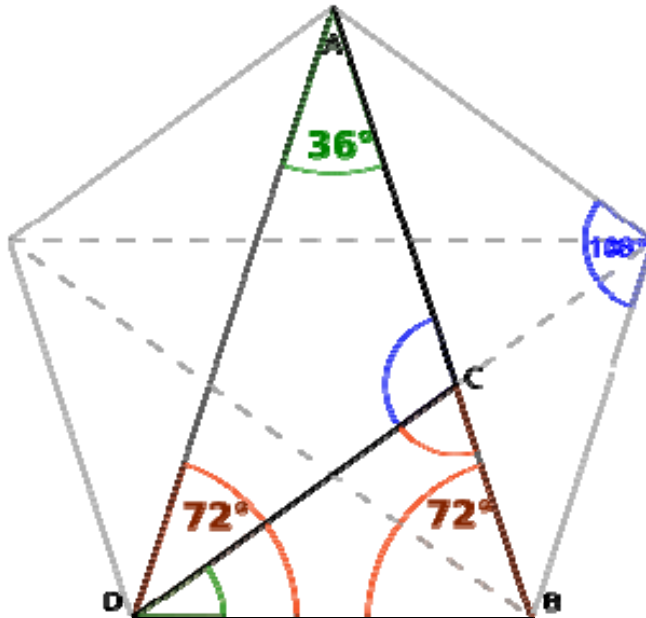
Il sistema  $Phi^{(n/7)}$ , come già evidenziato precedentemente, corrisponde quasi precisamente a quello calcolato su  $3^{(n/16)}$ , per cui segue una logica basata sul numero 3.

Con i multipli di  $7,2^\circ$  si ottengono i seguenti angoli:

<b>7,2</b>
<b>14,4</b>
<b>21,6</b>
<b>28,8</b>
<b>36,0</b>
<b>43,2</b>
<b>50,4</b>
<b>57,6</b>
<b>64,8</b>
<b>72,0</b>
<b>79,2</b>
<b>86,4</b>
<b>93,6</b>
<b>100,8</b>
<b>108,0</b>
<b>115,2</b>
<b>122,4</b>
<b>129,6</b>
<b>136,8</b>
<b>144,0</b>
<b>151,2</b>
<b>158,4</b>
<b>165,6</b>
<b>172,8</b>
<b>180,0</b>

E' degno di nota che tutti gli angoli ottenuti hanno come sintesi numerica finale il numero 9. Per esempio l'angolo di  $21,6^\circ$  ha come sintesi finale  $2 + 1 + 6 = 9$  o l'angolo di  $172,8^\circ$   $1 + 7 + 2 + 8 = 18$  che ancora si riduce a  $1 + 8 = 9$ .

Si creano gli angoli di  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  e  $108^\circ$  che sono alla base dei triangoli in sezione aurea basata sulla geometria del pentagono.



Si ottiene anche l'angolo di  $144^\circ$ . Il numero  $144 = 12 \cdot 12$  è un numero di Fibonacci, ed il 12 rappresenta la metà del numero delle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica (24). Si ottengono anche gli angoli esatti di  $180^\circ$ ,  $360^\circ$  ecc. Inoltre si ottiene l'angolo di  $432^\circ$  ( $7,2^\circ \cdot 60 = 21,6^\circ \cdot 20 = 432^\circ$ ). Il numero 432 in Hz è la frequenza base del sistema e, come abbiamo visto in precedenza, genera le serie di Fibonacci e Lucas. Nella rappresentazione a spirale incontriamo questo numero come angolo che include gli angoli del pentagono già menzionati ( $12 \cdot 36^\circ = 432^\circ$ ,  $6 \cdot 72^\circ = 432^\circ$ ,  $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$  e  $144^\circ \cdot 3 = 432^\circ$ ).

Osserviamo, inoltre, che la teoria della stringa eterotica

$$E_8 \times E_8$$

basata su una doppia coppia del massimo gruppo di Lie sporadico che ha dimensione uguale a 248, prevede l'esistenza di 496 bosoni di campo. È interessante notare come tale numero sia dato dalle seguenti espressioni:

$$496 = (24 \cdot 20) + (8 \cdot 2) = 480 + 16$$

$$496 = 432 + 8^2 = 432 + 64$$

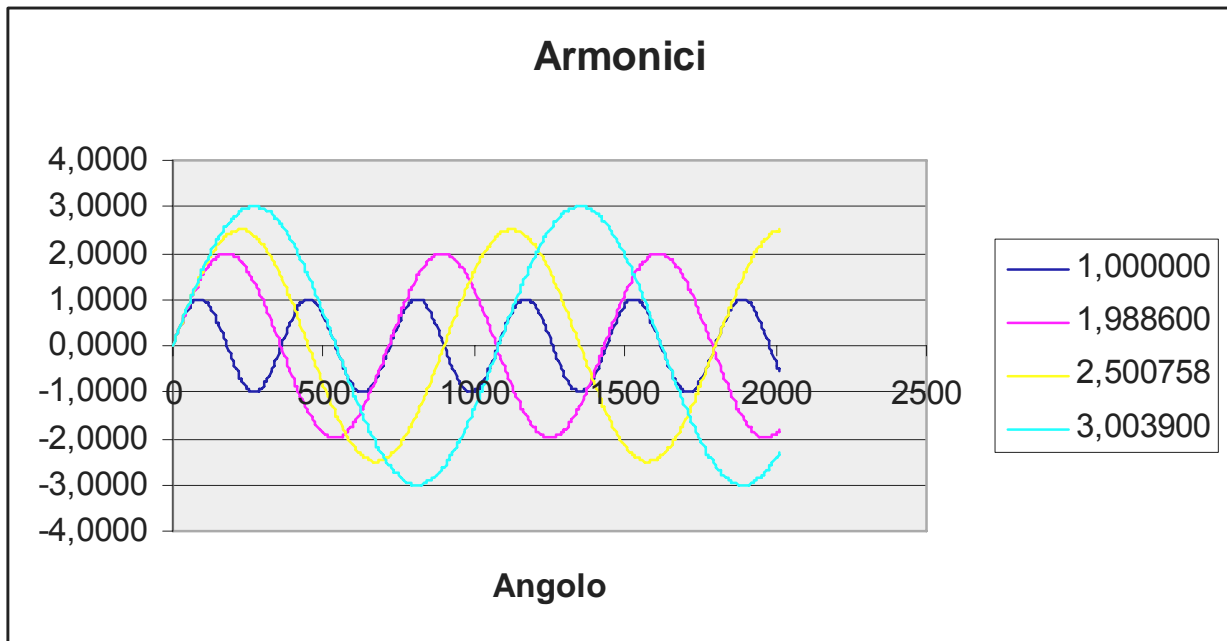
In esse, 24 ed 8 sono rispettivamente i numeri corrispondenti alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica e di una superstringa e 432, come già sappiamo, la frequenza del La<sub>3</sub> connesso al sistema musicale in sezione aurea  $Phi^{(n/7)}$ .

Moltiplicando 432° per 60 si ottengono 25.920 primi che equivalgono agli anni terreni corrispondenti all'anno Platonico che descrive un ciclo completo del nostro sistema solare attorno al suo centro. Dividendo 25.920 anni per 12 si ottengono 2.160 anni (la durata di un segno zodiacale). Inoltre, moltiplicando 360° per 60 si ottengono 21.600 primi che è  $2.160 \cdot 10$  corrispondente ai ca. 21.600 respiri quotidiani dell'essere umano. Dividendo 2.160 per 100 si ottiene 21,6 che corrisponde al valore numerico dell'angolo di un segmento del Nautilus.

Il nostro sistema musicale, con  $n$  interi, si basa sul fattore 100 ( $Phi^{(67/7)} = 100,071$ ), ma introducendo il valore intermedio  $n = 33,5$  si ottiene il fattore 10 ( $Phi^{(33,5/7)} = 10,0036$ ). Tale valore intermedio corrisponde a 10,8° ( $21,6° / 2 =$  mezzo segmento del Nautilus) che moltiplicato per 10 fornisce l'angolo 108° menzionato sopra. Dividendo 10 per 3 si ottiene 3,3333 e dividendo 72° per 3,33333 si ottiene l'angolo di un segmento di 21,6°. Quindi, è possibile affermare che il sistema  $Phi^{(n/7)}$  segue una logica decimale (10,100....) e ternaria (3 o 1/3).

E' interessante notare che per  $n = 16,66666$  l'angolo della spirale logaritmica corrisponde esattamente al valore dell'angolo giro di 360° ( $16,6666 \cdot 21,6° = 50 \cdot 7,2° = 360°$ ), assumendo un fattore del sistema musicale pari a  $3,144775 = Phi^{(16,6666/7)}$  che è quasi precisamente  $\pi$  e ricordando che la circonferenza (di un angolo giro di 360°) è data dal diametro moltiplicato per  $\pi$  ( $C = 2\pi r$ ). Inoltre, per  $n = 8,33333$  l'angolo corrisponde esattamente a 180° ( $8,33333 \cdot 21,6° = 25 \cdot 7,2° = 180°$ ) che genera un fattore del sistema musicale di 1,7733514, molto vicino a  $Phi + Phi/10 + Phi/100$  ( $1,618 + 0,1618 + 0,00618 = 1,77362$ ). Per  $n = 13,33333$  si ottiene un angolo di 288° ( $13,3333 \cdot 21,6° = 40 \cdot 7,2° = 288°$ ) che è uguale a  $2 \cdot 144°$ . Il fattore corrispondente è 2,500758 ( $Phi^{(13,33333/7)}$ ) che permette di ottenere suddivisioni su base 5 ( $2 \cdot 2,5 = 5$ ) oltre a quello basato su 3 (3,0039) per  $n = 16$  e quello basato su 2 (1,9886) per  $n = 10$  per il quale si ottiene un angolo pari a 216° ( $21,6° \cdot 10 = 216° = 2 \cdot 108 = 180° + 36°$ ).

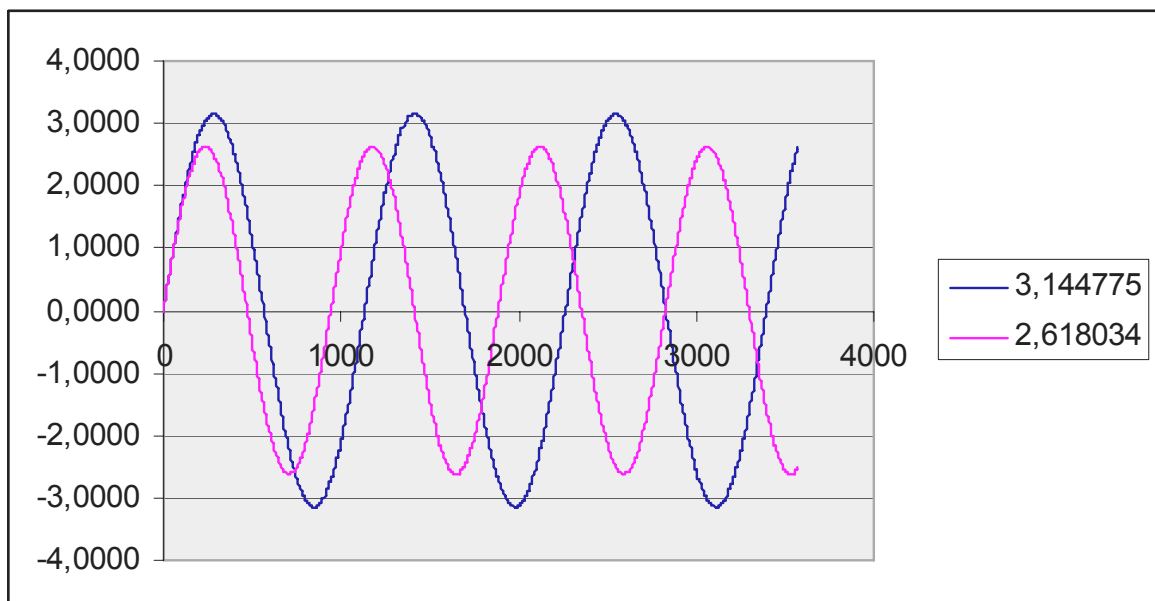




L'intervallo corrispondente al fattore di 2,5 ha un significato particolare in quanto  $360^\circ / 2,5 = 144^\circ = 72^\circ \cdot 2$ , valore già menzionato precedentemente.

Nel sistema  $\Phi^{(n/7)}$  è contenuto anche il rapporto  $6/5 = 1,2$  in quanto per  $n = 16,66666$  il valore del fattore del sistema è quasi  $\pi$  e  $\pi / \Phi^{i^2} = 1,19998 \approx 1,2$ . Nel caso presente il valore esatto del fattore del sistema è di 1,201197.

Nel grafico seguente viene rappresentato l'andamento di  $\Phi^{i^2}$  e  $\pi$  che si intersecano ogni 3 cicli per  $\Phi^{i^2}$  e ogni 2,5 cicli (rapporto 6/5) per  $\pi$ , ricordando che  $432^\circ / \pi = 360^\circ / \Phi^{i^2} = 137,5^\circ$ :



Il sistema  $\Phi^{(n/7)}$  intonato secondo il fattore  $1 = 432 \text{ Hz}$ , per  $n = -58$  genera la frequenza di 8,01 Hz (frequenza Schumann della Terra). Il sistema segue la logica dell'intervallo base che è in perfetto  $\Phi$ , mentre non riproduce il perfetto raddoppio delle frequenze (fattore 2): come già detto il fattore preciso corrisponde a 1,9886, per cui a 8,01 Hz per  $n = -48$  corrisponde la frequenza di 15,94 Hz e non 16,02 Hz. E' possibile tarare il sistema secondo un perfetto fattore 2 con  $2^{(n/10)}$ , ma in tal modo si perderebbe il valore esatto di  $\Phi$  di 1,6180339887 che diventerebbe 1,624505. L'errore tra il sistema  $\Phi^{(n/7)} = 2^{(n/10,0829)}$  con fattore  $\Phi$  perfetto e il sistema  $2^{(n/10)} = 1,624505^{(n/7)}$  con fattore 2 perfetto corrisponde ad un valore (errore 0,829%) ca. 7 volte superiore a quello che si ottiene con la differenza fra il sistema  $3^{(n/16)}$  con fattore 3 e il sistema  $3^{(n/15,98108)}$  con  $\Phi$  perfetto (errore 0,118%); per cui le frequenze generate dal sistema  $\Phi^{(n/7)}$  si sovrappongono molto meglio alla loro triplicazione anziché alla loro duplicazione.

Come dimostrato, il numero 432 è contenuto nel sistema intonato con fattore  $1 = 432 \text{ Hz}$  anche come angolo di base in una rappresentazione polare (spirale logaritmica) del sistema  $\Phi^{(n/7)}$ , per cui assume carattere universale, praticamente una costante naturale.

La scelta della natura, ovvero del Creatore, di disporre i segmenti del Nautilus nella maniera descritta è senz'altro motivata dalla sua piena corrispondenza in armonia con i numeri dell'universo, per cui è possibile collegare profondamente il sistema  $\Phi^{(n/7)}$  ai concetti pitagorici "Tutto è numero" e "musica delle sfere", in cui il cosmo con il movimento dei suoi astri è concepito come un gigantesco strumento musicale.

A tale proposito, utilizzando la terza legge di Keplero vogliamo calcolare le distanze medie dei pianeti dal Sole (semiassi delle loro orbite):

TERZA LEGGE - E' la relazione tra le dimensioni delle orbite e i periodi di rivoluzione dei pianeti: i quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi delle distanze, cioè:

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Dove  $P_1$  e  $P_2$  sono i periodi di rivoluzione di due pianeti e  $a_1$  e  $a_2$  sono i *semiassi maggiori* delle loro orbite.

Quindi, si ottiene la distanza media del pianeta dal Sole in base al suo periodo di rivoluzione  $P$  calcolandola come quadrato della sua velocità inversa. La velocità inversa è  $P^{1/3}$  per cui la distanza è  $(P^{1/3})^2 = P^{2/3}$ . Esattamente per la terza legge di Keplero, l'introduzione della divisione in terzi di un segmento di Nautilus ( $21,6^\circ / 3 = 7,2^\circ$ ) assume un significato fisico relativo al movimento dei pianeti.

A tale scopo osserviamo i periodi di rivoluzione dei pianeti attorno al sole Mt2 secondo John N. Harris espressi in anni terrestri nella tabella:

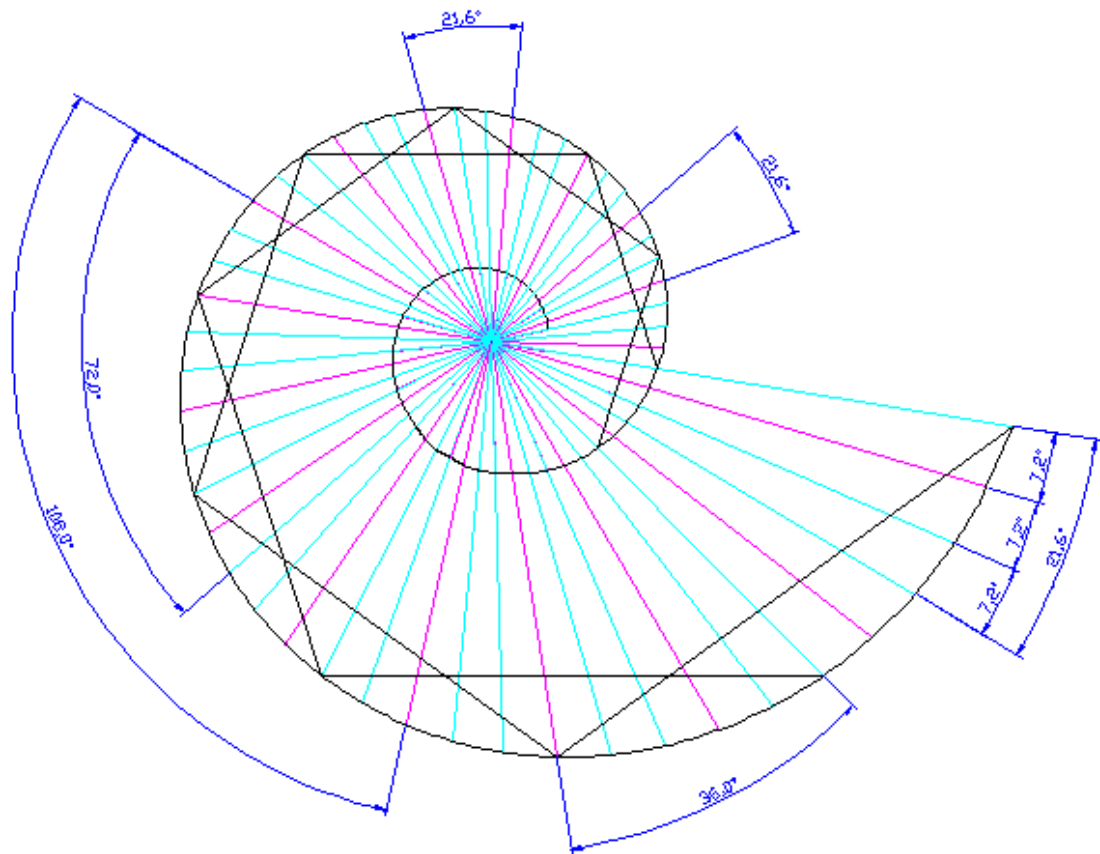
Pianeta	Esponente di Phi	Periodo in anni	Inverso Periodo in anni-1
Mercurio siderale	-3	0,236068	4,236068
Mercurio sinodico	-2	0,381966	2,618034
Venere siderale	-1	0,618034	1,618034
Terra	0	1,000000	1,000000
Marte siderale	1	1,618034	0,618034
Marte sinodico	2	2,618034	0,381966
Asteroidi siderale	3	4,236068	0,236068
Asteroidi sinodico	4	6,854102	0,145898
Giove siderale	5	11,09017	0,090170
Giove sinodico	6	17,94427	0,055728
Saturno siderale	7	29,03444	0,034442
Saturno sinodico	8	46,97871	0,021286
Urano siderale	9	76,01316	0,013156
Urano sinodico	10	122,9918	0,008131
Nettuno siderale	11	199,0050	0,005025

(John N. Harris, [www.spirasolaris.ca/sbb4c.html](http://www.spirasolaris.ca/sbb4c.html))

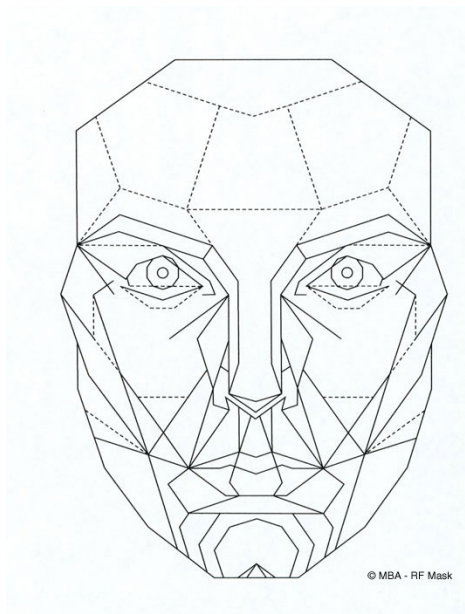
Si nota, che secondo l'interpretazione di N. Harris, i tempi di rivoluzione seguono le potenze di  $\Phi$ . Da ciò si conclude che insieme con la terza legge di Keplero, il sistema musicale  $\Phi^{(n/7)}$  si candida al concetto della "musica delle sfere".

L'introduzione di terzi di segmento del Nautilus permette di ottenere i seguenti angoli:  $36^\circ$  e  $72^\circ$ , che a loro volta consentono di disegnare due pentagoni, ovvero un decagono, nella spirale logaritmica. La lunghezza dei lati, seguendo la spirale, diminuisce logaritmicamente verso il centro.

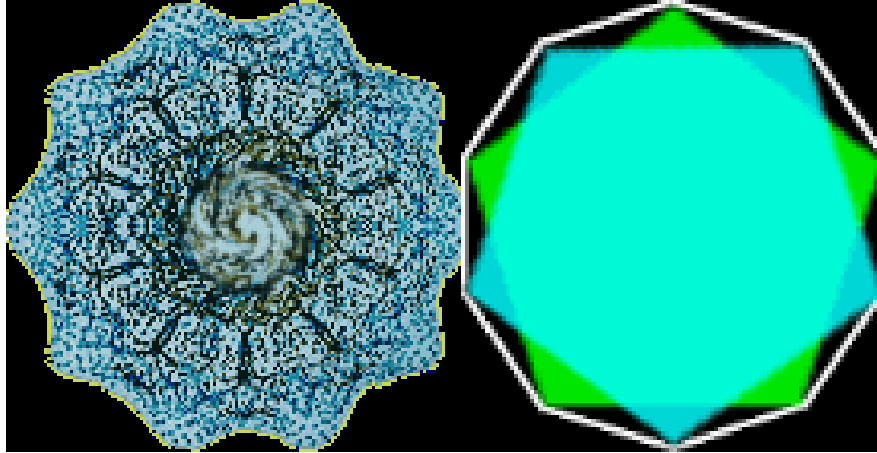
La figura seguente mostra il decagono.



A questo punto ricordiamo che il viso di una persona segue le linee interne del decagono e il Prof. Marquardt, un chirurgo plastico di fama, applica con successo da decenni maschere basate su tale geometria per ottenere i visi più belli in quanto, effettivamente, il pentagono e il decagono contengono il rapporto *Phi* ed alcune potenze di *Phi*, proporzioni che normalmente vengono ritenute belle.



Il Prof. Stephen Marquardt è arrivato all'attuale tecnica osservando la struttura del DNA che in sezione ha la geometria del decagono.



Il Sistema  $\Phi^{(n/7)}$  con  $n=1,2,3\dots$  con l'introduzione dei terzi di segmento del Nautilus  $\Phi^{(n/7)}$  con  $n = 1, 1.3333, 1.6666, 2, 2.3333, 2.6666, 3 \dots$  permetterà di simulare le proporzioni del viso umano e del DNA. Lavori futuri avranno il compito di approfondire questi aspetti.

## Considerazioni musicali

Il *Sistema Musicale Phi<sup>(n/7)</sup>* è un sistema infinito scalare (modulare precisamente non più rispetto al raddoppio delle frequenze come in quello temperato, ma rispetto a *Phi*) in cui la distanza intervallare tra un suono e l'altro corrisponde costantemente a 119 cents (intervallo che chiameremo *Phi-tone*). Si noti come 119 sia la risultante del prodotto tra due numeri primi (7 e 17) che includono in se l'importante fattore numerico 7.

Caratteristiche intervallari del sistema sono:

- l'Intervallo Aureo (ogni 7 suoni, 8<sup>a</sup> di *Phi-tone*), di carattere tensivo, ampio 833 cents ( $833 = 119 \cdot 7 = 7^2 \cdot 17$ );
- l'Intervallo di 3<sup>a</sup> Armonica (ogni 16 suoni, 17<sup>a</sup> di *Phi-tone*), estremamente consonante e distensivo poiché, come dice la parola stessa, coincidente quasi perfettamente (con un errore del 0,1 %) con la terza armonica naturale del suono base. Tale corrispondenza deriva dal fatto che, come già dimostrato in precedenza, il *Sistema Phi<sup>(n/7)</sup>* si basa quasi perfettamente anche sul fattore 3; per tanto la frequenza in Hz del suono base si triplica nell'*Intervallo di 3<sup>a</sup> Armonica*. L'ampiezza dell'intervallo corrisponde a 1904 cents ( $1904 = 119 \cdot 16 = 2^4 \cdot 7 \cdot 17$ ); Questo intervallo coincide quasi precisamente (approssimazione del 0,1%) con l'intervallo di 12<sup>a</sup> del sistema temperato equabile dodecatonico, caratterizzato da un ampiezza di 1902 cents.
- l'intervallo di 7<sup>a</sup> di Phi-tone (ogni 6 suoni), derivante direttamente da quello di 3<sup>a</sup> Armonica, anch'esso molto consonante e distensivo. Tenendo conto dei fattori 3 e 2 (quest'ultimo, come già visto, con una approssimazione maggiore, ma comunque accettabile se lo si delimita a solo un raddoppio/dimezzamento della frequenza base) su cui si basa il nostro *Sistema Phi<sup>(n/7)</sup>*, l'intervallo di 7<sup>a</sup> di *Phi-tone* risulta essere generato con buona approssimazione dalla triplicazione e il successivo dimezzamento della frequenza base:  $[A,B] \rightarrow B = A \cdot 3 / 2$ . Precisamente l'ampiezza dell'intervallo corrisponde a 714 cents ( $714 = 119 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ ); Questo intervallo si avvicina con un approssimazione del 1,6 % all'intervallo di 5<sup>a</sup> (ampio 702 cents) del sistema temperato equabile, ma corrisponde perfettamente a quell'intervallo che nella musica antica greca

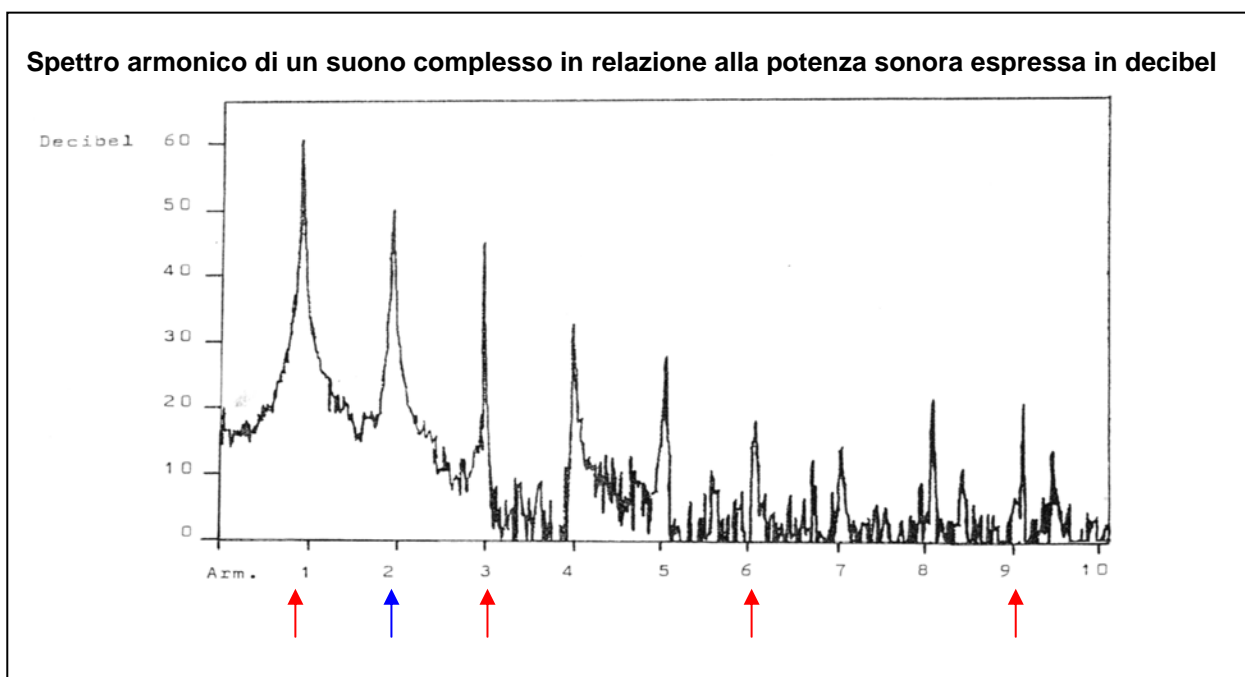
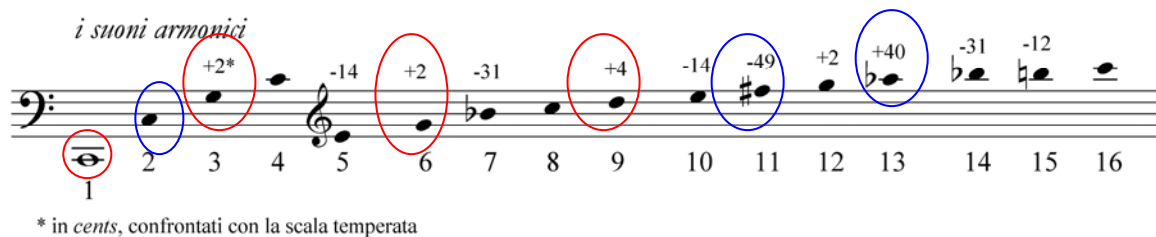
misurava 3 toni (toni grandi) + 1 semitono aristossenico o 7 semitoni aristossenici [( 204 · 3 + 102) cents = (102 · 7) cents = 714 cents].

- l'intervallo di 11<sup>a</sup> di Phi-tone (ogni 10 suoni), corrispondente con approssimazione trascurabile al raddoppio della frequenza, in base al fattore 2. Tale intervallo coincide quasi precisamente (approssimazione dello 0,8 %) con l'intervallo di 8<sup>a</sup> del sistema temperato equabile. L'ampiezza corrisponde a 1190 cents ( $1190 = 119 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$ ).
- L'intervallo di 6<sup>a</sup> di Phi-tone (ogni 5 suoni), di natura molto instabile, ampio 595 cents ( $119 \cdot 5 = 595$ ), a livello percettivo è molto vicino (approssimazione dello 0,8 %) a quello di *tritone* del sistema temperato equabile ampio 600 cents.

L'intervallo di 7<sup>a</sup> di Phi-tone risulta armonicamente “risolutorio” rispetto all'*Intervallo Aureo* su stesso suono base, quasi in un gioco armonico riconducibile al concetto di “sensibile/fondamentale”.

Tali riflessioni sulla natura intervallare e quindi armonica del *Sistema Phi<sup>(n/7)</sup>* in rapporto al sistema temperato equabile dodecatonico (quello adottato ormai per convenzione nella cultura musicale moderna occidentale) mette in luce alcuni punti di corrispondenza tra i due sistemi con approssimazioni che oscillano, come visto, dallo 0,1 % all'1,6 %. In pratica, se su un pianoforte ben intonato si suonano per esempio gli intervalli DO – SOL<sup>8<sup>a</sup> sopra</sup>, DO – FA#, DO – SOL si sta suonando, con indici di approssimazione rispettivamente sempre maggiori, ma compresi nell'intervallo [0,1 % - 1,6 %], in una “*dimensione aurea*”. Naturalmente, gli intervalli evidenziati nell'esempio possono essere costruiti a partire da qualsiasi suono base.

Ad una analisi approfondita dello spettro delle prime 16 parziali armoniche naturali, si evince come il *Sistema Musicale Phi<sup>(n/7)</sup>* si basi con molta precisione sulle armoniche (e subarmoniche) 1, 3, 6 e 9 (multipli di 3 ed evidenziati in rosso negli schemi successivi) e con approssimazione variabile anche sulle armoniche (e subarmoniche) 2, 11 e 13 (evidenziati in blu).



Da un punto di vista strettamente pragmatico, legato alla necessità di poter scrivere “Musica Aurea” con il Sistema Musicale  $\Phi^{(n/7)}$  per gli strumenti convenzionali, utilizzando il sistema di notazione contemporanea standardizzato, è possibile, attraverso approssimazioni per un margine di errore trascurabile alla percezione dell’orecchio umano, trascrivere la mappa dei suoni del Sistema Musicale  $\Phi^{(n/7)}$  (non completa di tutte le sue frequenze, però!) utilizzando la notazione microtonale contemporanea basata sui quarti e sesti di tono. Tali problemi applicativi non sussistono per alcune tipologie di strumenti elettronici e la Musica Elettronica in generale, in cui è possibile lavorare con la campionatura di frequenze precise.



## Nota 1

Nel numero di Settembre 2008 de “Le Scienze”, è stato pubblicato un articolo dei fisici Jan Ambjorn, Jerzy Jurkiewicz e Renate Loll “Un nuovo sguardo sullo spazio-tempo”, in cui viene descritto il loro interessantissimo tentativo di una Teoria Quantistica della Gravità. Spiegare in dettaglio la forma dello spazio-tempo è l’obiettivo principale di ogni teoria della gravità quantistica. Per determinare come lo spazio si auto-costruisce, i fisici devono prima trovare un modo per descriverne la forma. A questo scopo hanno individuato i triangoli e le loro generalizzazioni in dimensioni superiori (in cui è insito il rapporto aureo), che, disposti a mosaico, approssimano efficacemente una forma curva. Per lo spazio-tempo, i blocchi elementari sono generalizzazioni a quattro dimensioni del triangolo che vengono definiti “simplessi quadridimensionali”. Unendo simplessi quadridimensionali lungo le loro “facce” (che in realtà sono tetraedri tridimensionali) è possibile generare uno spazio-tempo quadridimensionale. Lo spazio-tempo può assumere un gran numero di forme possibili. Secondo la teoria quantistica, la forma che osserviamo con più probabilità è la media pesata di tutte queste possibilità. Nel ricostruire le forme unendo triangoli, gli studiosi “pesano” ogni forma secondo il numero di triangoli necessari per comporla. Per garantire che la media corrisponda proprio a quanto osserviamo, i triangoli devono seguire alcune regole: in particolare devono avere una propria freccia del tempo. Se viene aggiunta la regola secondo cui triangoli adiacenti devono avere una nozione di tempo coerente – in modo che causa ed effetto siano distinguibili senza ambiguità – il risultato è uno spazio-tempo a quattro dimensioni che somiglia in modo stupefacente al nostro universo. Per il funzionamento del loro modello, Ambjorn, Jurkiewicz e Loll dovevano includere una costante cosmologica, una sostanza invisibile ed immateriale contenuta nello spazio anche in completa assenza di altre forme di materia ed energia. Lo spazio-tempo emergente ha una geometria che i fisici chiamano “geometria di de Sitter”, che è proprio la soluzione delle equazioni di Einstein in un universo che contenga soltanto la costante cosmologica. È davvero sorprendente che, assemblando blocchi fondamentali microscopici, senza tenere conto di alcuna simmetria o struttura geometrica privilegiata, si ottenga uno spazio-tempo che, a larga scala, ha la forma altamente simmetrica dell’universo di de Sitter. (Notiamo come la geometria di de Sitter e lo spazio-tempo di de Sitter ed anti-de Sitter – AdS – siano utilizzati moltissimo anche nella Teoria delle Stringhe). Dai calcoli degli autori, la dimensione spettrale, che descrive come gli oggetti si diffondono in un mezzo in funzione del tempo, dello spazio-tempo passa da quattro (a

grandi scale) a due (a piccole scale) e lo spazio-tempo si scompone da una forma omogenea e continua ad una frattale e contorta (in cui è insito il rapporto aureo). In pratica, fino a circa  $10^{-34}$  metri, l'universo quantistico a larga scala è descritto dalla classica geometria di de Sitter a quattro dimensioni, nonostante le fluttuazioni quantistiche siano sempre più significative. A scale ancora più piccole, le fluttuazioni quantistiche dello spazio-tempo diventano tanto forti da compromettere la nozione classica ed intuitiva di geometria. Il numero di dimensioni, dal valore classico di quattro, precipita a circa due. Tuttavia, secondo le nostre conoscenze, lo spazio-tempo è ancora continuo. Gli autori stanno indagando scale ancora inferiori. Una possibilità che è scaturita è che l'universo divenga auto-simile ed abbia lo stesso aspetto a tutte le scale sotto una certa soglia (frattale). In questo caso lo spazio-tempo consisterebbe in una regione di ripetitività infinita: la struttura osservata appena al di sotto della soglia semplicemente ripeterebbe se stessa ad ogni scala più piccola, fino all'infinito. Lo spazio-tempo quantistico si può immaginare come un fiocco di neve: a piccole scale è un frattale, ma a grandi scale è tridimensionale ed omogeneo.

**Nota 2**

GRAFICO 1

Grafico 1 per i valori dei rapporti  $p(n+1)/p(n)$  fino a  $n = 15$

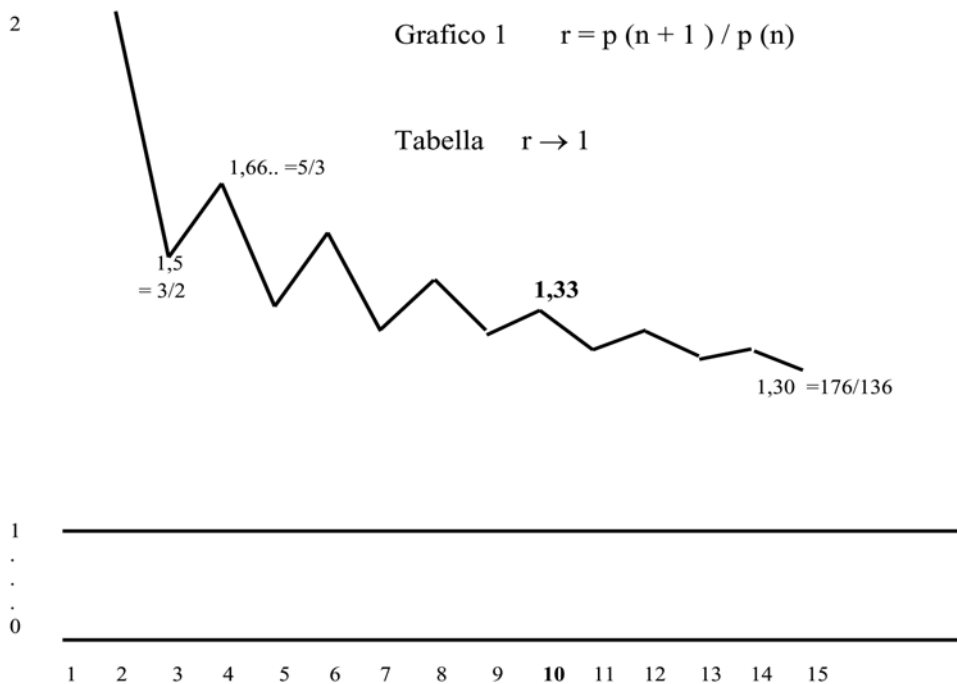
I valori sulla x sono i valori della tabella riportata alla fine del lavoro “I gruppi di Lie...” seconda parte, relativa alle partizioni” già pubblicato di recente sul sito del Dott. Nardelli (<http://xoomer.alice.it/stringtheory>).

I valori sulla y sono indicati in basso e sono i numeri naturali da 1 a 15.

I valori sulla x sono i valori con cui moltiplicare i valori da 1 a 15 per ottenere i valori approssimativi del numero di partizioni relative al numero n successivo. Per esempio, se  $n = 10$ , e quindi  $p(10) = 42$ , per avere il valore di  $p(11)$  bisogna moltiplicare  $42 \times 1,33$  (il valore corrispondente a 10), ottenendo  $55,86... \approx 56 = p(11)$ .

Per la tabella dei valori esatti di  $p(n)$  con  $n$  fino a 15, vedere il libro “L’enigma dei numeri primi” di Marcus du Sautoy, pag. 261, e che per comodità riportiamo:

“Numero (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Partizioni p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176”



## GRAFICO 2

Grafico 2 per  $r = p(10^k + 1) / p(10^k)$   
(Tabella dei rapporti relativi a potenza k di 10)

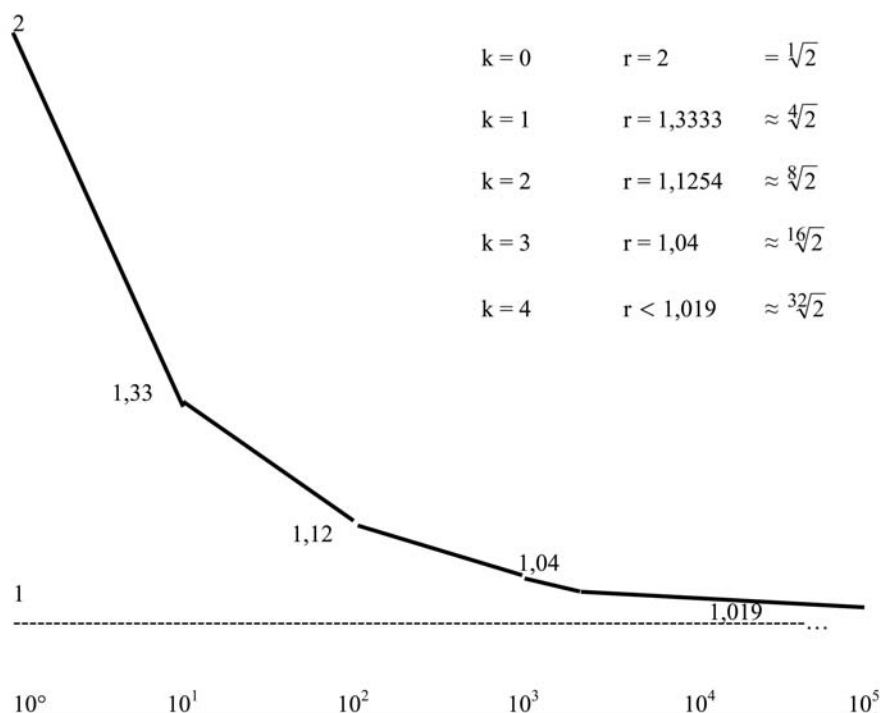


Grafico simile a quello del decrescere del termine d'errore nel TNP, e che dimostra il rapido decrescere del rapporto verso il valore 1 se  $n = 10^k$  va all'infinito.

Grafico simile a quello del termine d'errore nel TNP, vedi lavoro "Due formule più precise per il calcolo di  $\pi(N)$  e dell' $N^\circ$  numero primo" già pubblicato sul sito del Gruppo Eratostene <http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu>.

Per esempio, per un calcolo approssimativo di  $p(201)$ , sappiamo, sempre da Sauty, che  $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$  il coefficiente per cui moltiplicarlo, e calcolato per interpolazione  $(1,12 - 1,04) / 5 = 0,016$ , ( $200 = 1/5$  di  $1\,000$ )

$$1,12 - 0,016 = 1,104$$

(abbiamo usato il segno – perché la funzione è decrescente)

$$p(201) \approx 3\,972\,999\,029\,388 \times 1,104 = 4\,386\,190\,928\,444,352$$

valore approssimato ma molto vicino al valore reale (intero), che però non conosciamo (Marcus du Sautoy riporta solo l'esempio per  $p(200)$ ). Comunque, possiamo dire che a livello di  $n = 200$ ,  $p(n)$  cresce con coefficiente di circa 1,104 e con una differenza aritmetica di circa 413 191 899 056 unità, circa un decimo del valore di partenza, essendo il coefficiente moltiplicativo 1,104. E così via, fino a valori prossimi a  $10000 = 10^4$ , dove il coefficiente è ancora più basso: 1,019, e tendente a 1 per  $n$  tendente all'infinito. Quindi, la funzione  $p(n)$  cresce più velocemente per bassi valori di  $n$  (vedi Grafico 1), e poi sempre meno velocemente (o più lentamente) per valori di  $n$  sempre più alti.

Ora bisognerebbe vedere eventuali relazioni di questo andamento con i livelli di energia degli atomi, poiché, come scrive Sautoy (pag 261): “(le partizioni) sono numeri che spuntano nel mondo fisico quasi con la stessa frequenza dei numeri di Fibonacci, Per esempio, dedurre la densità dei livelli energetici in certi sistemi quantistici semplici si riduce a comprendere il modo in cui cresce il numero delle partizioni” e questi nostri grafici sulla funzione  $p(n)$  mostrano chiaramente come cresce il numero delle partizioni per  $n$  successivi lungo la retta numerica; questo potrebbe essere utile nelle teorie sulla gravità e sulle stringhe, oltre che in fisica quantistica.

## **Ringraziamenti**

Gli autori desiderano ringraziare il Dott. **Mariano Del Gaudio**, per il suo prezioso contributo riguardo all'idea dell'analisi che è stata svolta sul grafico dei primi 5000 numeri primi con il metodo della "regressione" ed allo studio del grafico relativo ai valori risultanti inerenti i residui. E' doveroso ringraziare anche **Francesco Di Noto**, per l'elaborazione dei due grafici descritti nella Nota 2.

## Bibliografia

Christian Lange “*Progetto Vorteggs*” – Nexus Anno XIII n.65-66-67;

M. Nardelli, F. Di Noto, A. Tulumello “*Sulle possibili relazioni matematiche fra Funzione zeta di Riemann, Numeri Primi, Serie di Fibonacci, Partizioni e Teoria di Stringa*” – CNRSOLAR – Novembre 2006;

Christian Lange e Michele Nardelli “*Serie di Fibonacci, Rapporto aureo ed ovaloidi a sezione aurea: connessioni con la Teoria delle Stringhe*” – CNRSOLAR – Giugno 2007;

Branko Dragovich “*Zeta Strings*” – arXiv:hep-th/0703008v1; “*Zeta Nonlocal Scalar Fields*” – arXiv:hep-th/0804.4114v1; “*Some Lagrangians with Zeta Function Nonlocality*” – arXiv:hep-th/0805.0403v1;

Jan Ambjorn, Jerzy Jurkiewicz e Renate Loll “*Un nuovo sguardo sullo spazio-tempo*” – Le Scienze (edizione italiana di Scientific American) – Settembre 2008;

[http://it.wikipedia.org/wiki/Armonici\\_naturali](http://it.wikipedia.org/wiki/Armonici_naturali);

Pietro Righini “*Lessico di acustica e tecnica musicale*”, ed. G. Zanibon – Padova.